RWTH AACHEN UNIVERSITY

Lehrstuhl für Theoretische Informationstechnik

Zusatzübung zu Kommunikationsnetze II

Prof. Dr.-Ing. Anke Schmeink, Gernot Fabeck, Henning Maier

28.02.2011, WSH 407 A, 15 Uhr

Aufgabe 1. Eine Service-Hotline verfüge über B Kundenbetreuer, die eingehende Kundenanrufe entgegennehmen. Die eingehenden Kundenanrufe genügen einem Poisson-Prozess mit Intensität α Anrufe pro Zeiteinheit. Die Dauer eines Gespräches sei exponentialverteilt und betrage im Mittel $1/\beta$ Zeiteinheiten. Wenn alle B Betreuer im Kundengespräch sind, kommen weitere eingehende Anrufe zunächst in eine Warteschleife mit P Plätzen, in der Hintergrundmusik gespielt wird. Ist die Anzahl P von Kunden erreicht, die in der Warteschleife gehalten werden können, so wird ein neu eingehender Kundenanruf durch ein Besetztzeichen abgewiesen.

Zusätzlich zur Hintergrundmusik wird die aktuelle Anzahl von Kunden durchgegeben, die sich vor dem wartenden Kunden in der Warteschleife befinden. Je höher diese Anzahl ist, desto eher ist der Kunde geneigt, den Anruf selber abzubrechen. Die Wartezeit eines Kunden sei exponentialverteilt mit dem Erwartungswert $1/w$ Zeiteinheiten, wobei $w \geq 1$ die Anzahl der Kunden vor ihm in der Warteschleife bezeichnet.

(a) Modellieren Sie das System der Service-Hotline durch einen geeigneten Markov-Prozess, indem Sie den Zustandsraum und den Intensitätsgraphen angeben.

(b) Geben Sie für $B = 2$, $P = 3$, $\alpha = \beta = 2$ den Übergangsgraphen und die Übergangsmatrix der eingebetteten Markov-Kette an.

Betrachten Sie nun ein System, dessen Verhalten durch den folgenden Intensitätsgraphen beschrieben wird:

$$\textcircled{0} \underset{1}{\overset{6}{\rightleftarrows}} \textcircled{1} \underset{2}{\overset{6}{\rightleftarrows}} \textcircled{2} \underset{3}{\overset{6}{\rightleftarrows}} \textcircled{3} \underset{3}{\overset{6}{\rightleftarrows}} \textcircled{4} \underset{4}{\overset{6}{\rightleftarrows}} \textcircled{5} \underset{6}{\overset{6}{\rightleftarrows}} \textcircled{6} \underset{9}{\overset{6}{\rightleftarrows}} \textcircled{7}$$

(c) Geben Sie die Parameter B, P, α und β der zugehörigen Service-Hotline an.

(d) Berechnen Sie die stationäre Verteilung des zugehörigen Markov-Prozesses. Wie lautet die Blockierwahrscheinlichkeit des Systems im stationären Zustand, d.h., mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein neu eingehender Kundenanruf abgewiesen?

(e) Berechnen Sie die erwartete Gesamtzahl und die Anzahl von wartenden Kunden in der Service-Hotline im stationären Zustand.

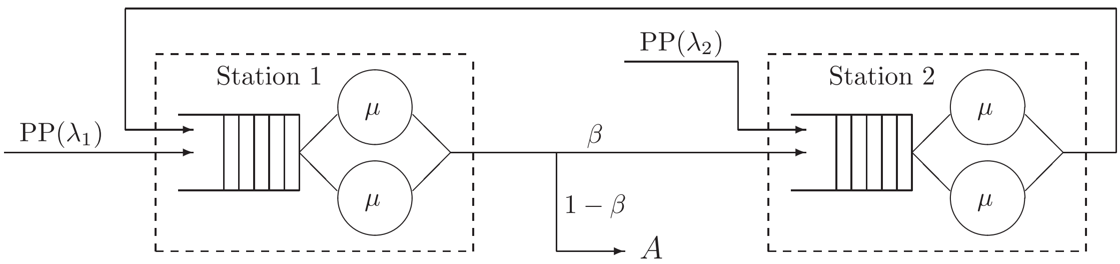
(f) Nehmen Sie an, dass die Service-Hotline durch eine von zwei Möglichkeiten erweitert werden kann:

(i) einen zusätzlichen Kundenbetreuer,

(ii) zwei weitere Warteplätze.

Wie lauten die Blockierwahrscheinlichkeiten der beiden Alternativen?

Aufgabe 2. Gegeben sei ein offenes Jackson-Netz mit $J = 2$ Bedienstationen, die jeweils als $M/M/2/\infty$-Bediensysteme modelliert werden. An Station 1 ist der Ankunftsprozess als Poissonprozess $\mathrm{PP}(\lambda_1)$ mit der Intensität $\lambda_1 = \alpha\lambda$ und an Station 2 als $\mathrm{PP}(\lambda_2)$ mit $\lambda_2 = (1-\alpha)\lambda$ beschrieben, wobei $0 < \alpha < 1$ gilt. Die Bedienintensitäten der Server werden fr beide Stationen jeweils als $\mu > 0$ angenommen. Der Parameter $0 < \beta < 1$ beschreibt die Routingwahrscheinlichkeit von Station 1 nach Station 2. A bezeichnet die Außenwelt.



(a) Geben Sie Zustandsraum, Routingmatrix und die Lösung der Flussgleichungen an. Geben Sie den Fluss Λ_2^* proportional zu Λ_1^* an.

(b) Wann existiert eine stationäre Verteilung? Geben Sie diese für $\mu = 2.5$, $\beta = 0.5$, $\alpha = 0.25$ und $\lambda = 1$ an.

An Ausgang A wird eine weitere Station, als Station 3 bezeichnet, angeschlossen, die als $M/M/\infty$-Bediensystem mit Bedienintensität ν modelliert wird. Die von Station 3 bearbeiteten Nachrichten gehen mit Wahrscheinlichkeit $0 < \gamma < 1$ zur Station 1 oder sie verlassen das Jackson-Netz mit Wahrscheinlichkeit $1 - \gamma$.

(c) Bestimmen Sie für die Parameter $\nu = \mu = 2.5$, $\beta = 0.5$, $\alpha = 0.25$, $\gamma = 0.25$ und $\lambda = 1$ die stationäre Verteilung an Station 3.

(d) Wie lautet im stationären Zustand die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Intervall der Länge drei genau zwei Anforderungen die Station 1 erreichen? Verwenden Sie die Werte der Parameter aus Unterpunkt (c) und nehmen Sie an, dass der Ankunftsstrom an Station 1 ein Poissonprozess ist.

Um ein geschlossenes Jackson-Netz zu erhalten, werden die Ankunftsprozesse $\mathrm{PP}(\lambda_1)$ und $\mathrm{PP}(\lambda_2)$ entfernt. Alle bearbeiteten Anforderungen aus Station 3 gehen zurück zu Station 1. Nun wird Station 3 durch ein $M/M/2/\infty$-Bediensystem mit Bedienintensität ν ersetzt.

(e) Es befinden sich nun $M = 2$ Anforderungen in diesem Jackson-Netz. Geben Sie explizit die Zustände des Zustandsraumes sowie die Routingmatrix für dieses geschlossene Jackson-Netz an.

(f) Berechnen Sie mit $M = 2$, $\Lambda_1^* = 1$, $\beta = 0.25$, $\mu = 2$ und $\nu = 0.5$ für alle Zustände $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ des Zustandsraumes die Werte der stationären Verteilung. Geben Sie dazu auch den Wert der normierenden Konstanten K_M an.