4. Übung zu Kommunikationsnetze II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Gernot Fabeck, Michael Reyer

Abgabe am 14.5.2007 in der Vorlesung/Übung

Aufgabe 9. Die homogene Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschreibe die Anzahl der Tage, die am Tag n seit dem letzten Neustart eines Servers vergangen sind, $X_1 = 0$. Es sei $0 < p_i < 1$ die bedingte Wahrscheinlichkeit für einen Neustart des Servers bis zum nächsten Tag, wenn der Server zuvor $i \in \mathbb{N}_0$ Tage ohne Neustart durchlief.

a) Geben Sie Übergangsgraph und Übergangsmatrix der obigen Markov-Kette an.

b) Weisen Sie nach, dass für den Fall $p_i \equiv p$ die Markov-Kette positiv-rekurrent ist. Geben Sie für diesen Fall die eindeutig bestimmte stationäre Verteilung an.

c) Betrachten Sie den Fall unterschiedlicher p_i und weisen Sie nach, dass die Markov-Kette genau dann rekurrent ist, wenn $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = \infty$.

Hinweis: Es sei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen mit $0 < a_i < 1$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Für die Folge $(b_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ mit $b_j = \prod_{i=1}^{j}(1 - a_i)$ gilt $\lim_{j\to\infty} b_j = 0$ genau dann, wenn $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \infty$.

Aufgabe 10. Das Herz der Suchmaschine Google ist *Page Rank*, ein Algorithmus zur Beurteilung von Webseiten, der allen Webseiten im Internet ein Gewicht zuweist, welches zur Sortierung der Suchergebnisse verwendet wird. Dem Algorithmus liegt folgendes Modell eines Nutzers zu Grunde, der von einer beliebigen Seite aus zufällig durch das Web surft:

1. Mit Wahrscheinlichkeit $0 < p < 1$ (Google wählt $p = 0.85$) folgt der Nutzer einem Link auf der aktuellen Seite. Wenn mehrere Links zu verschiedenen Seiten vorhanden sind, so wird einer von diesen zufällig gemäß einer Gleichverteilung ausgewählt.

2. Mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ springt der Nutzer zu einer Seite, welche zufällig gemäß einer Gleichverteilung aus allen existierenden Webseiten ausgewählt wird.

Surfen durch ein Web mit N Webseiten kann als Markov-Kette modelliert werden, wobei sich die Übergangswahrscheinlichkeiten aus dem oben beschriebenen Verfahren ergeben. Ist $\boldsymbol{p}^*$ die stationäre Verteilung dieser Markov-Kette, dann ist das Gewicht einer Seite $i \in \{1, ..., N\}$ durch p_i^* gegeben. Die Matrix $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{1\le i,j\le N}$ sei die Adjazenzmatrix eines Graphen, der das Web beschreibt, d.h., $a_{ij} = 1$ bedeutet, es existiert ein Link von Seite i zu Seite j. Entsprechend bedeutet $a_{ij} = 0$, dass es keinen Link von i nach j gibt. Geben Sie für ein Web aus 4 Webseiten mit der Adjazenzmatrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die Übergangsmatrix der zugehörigen Markov-Kette für $p = \frac{3}{4}$ an und berechnen Sie die Seitengewichte gemäß Page Rank.