

## 4. Übung zu Kommunikationsnetze II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Gernot Fabeck, Georg Böcherer  
18.5.2009

**Aufgabe 1.** Die homogene Markov-Kette  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  beschreibe die Anzahl der Tage, die am Tag  $n$  seit dem letzten Neustart eines Servers vergangen sind, dabei sei  $X_1 = 0$ . Ferner sei  $0 < p_i < 1$  die bedingte Wahrscheinlichkeit für einen Neustart des Servers bis zum nächsten Tag, wenn der Server zuvor  $i \in \mathbb{N}_0$  Tage ohne Neustart durchlief.

- Geben Sie Übergangsgraph und Übergangsmatrix der obigen Markov-Kette an.
- Weisen Sie nach, dass für den Fall  $p_i \equiv p$  die Markov-Kette positiv-rekurrent ist. Geben Sie für diesen Fall die eindeutig bestimmte stationäre Verteilung an.
- Betrachten Sie den Fall unterschiedlicher  $p_i$  und weisen Sie nach, dass die Markov-Kette genau dann rekurrent ist, wenn  $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = \infty$ .

**Hinweis:** Es sei  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge reeller Zahlen mit  $0 < a_i < 1$  für alle  $i \in \mathbb{N}_0$ . Für die Folge  $(b_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$  mit  $b_j = \prod_{i=1}^j (1 - a_i)$  gilt  $\lim_{j \rightarrow \infty} b_j = 0$  genau dann, wenn  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \infty$ .

**Aufgabe 2.** Ein Puffer besitze eine maximale Kapazität von  $r$  Paketen. Zu den Zeitpunkten  $n \in \mathbb{N}$  komme mit Wahrscheinlichkeit  $\alpha \in [0, 1]$  ein neues Paket an. Falls der Puffer noch freie Kapazität aufweist, wird das Paket angenommen, ansonsten wird es abgewiesen. Entsprechend werde zu diesen Zeitpunkten mit Wahrscheinlichkeit  $\beta \in [0, 1]$  ein bereits im Puffer befindliches Paket weitergeschickt. Das Ankommen neuer und das Verschicken bereits im Puffer befindlicher Pakete seien stochastisch unabhängig. Es sei  $X_n$  die Anzahl der Pakete im Puffer zum Zeitpunkt  $n \in \mathbb{N}_0$  nach zufälligem Zu- und Abgang,  $X_0 = s \leq r$ .

- Geben Sie Zustandsraum, Übergangsgraph und Übergangsmatrix der Markov-Kette  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  an.
- Wie lauten die globalen Gleichgewichtsgleichungen?
- Berechnen Sie für  $r = 3$ ,  $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$  die stationäre Verteilung der Markov-Kette.