b) Wir haben in der Übung gezeigt, daß für $p_i \equiv p$ die Markov kette positiv-rekurrent ist.

Es bleibt, die stationäre Verteilung zu berechnen.

Die Übergangsmatrix ist für $p_i \equiv p$ gegeben durch

$$\Pi = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 & \cdots & \\ p & 0 & 1-p & & \\ p & 0 & 0 & 1-p & \\ p & \vdots & & & \ddots \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

$q = (q_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$, $\forall i \in \mathbb{N}_0 : q_i \geq 0$ ist stationäre Verteilung, falls

① $q = q\,\Pi$

② $\sum_{i=0}^{\infty} q_i = 1$

① ist äquivalent zu: $\underbrace{q_0 = \sum_{i=0}^{\infty} p\, q_i}_{(*)}$ und $\underbrace{\forall i \geq 1 : q_i = (1-p)\, q_{i-1}}$

$\Longrightarrow \forall i \geq 1 : q_i = (1-p)^i\, q_0 \quad (**)$

$(**)$ in ②: $\sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i q_0 = q_0 \frac{1}{p} \overset{!}{=} 1 \Longrightarrow \forall i \geq 0 : q_i = (1-p)^i p$

geometrische Reihe

Es bleibt zu überprüfen, ob $(*)$ mit dieser Lösung erfüllt ist.

$$\sum_{i=0}^{\infty} p\, q_i = \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i p \cdot p = p^2 \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i = p^2 \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p^2}{p} = p = q_0$$

✓

c)

Eine irreduzible Markov-Kette ist rekurrent, falls es einen Zustand i gibt, für den gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1$ (siehe Def. 3.7 u. Prop. 3.9 im Skript)

Wähle $i=0$. Zu zeigen: $\sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} = 1 \iff \sum_{i=0}^{\infty} p_i = \infty$

Es gilt:

$$\sum_{n=1}^{m} f_{00}^{(n)} = 1 - P(n > m) = 1 - \prod_{i=0}^{m-1} (1-p_i) \xrightarrow{m \to \infty} 1$$

$$\iff \lim_{m \to \infty} \prod_{i=0}^{m-1} (1-p_i) = 0$$

$$\overset{\text{Hinweis}}{\iff} \sum_{i=0}^{\infty} p_i = \infty$$

$\boxed{\text{q.e.d.}}$