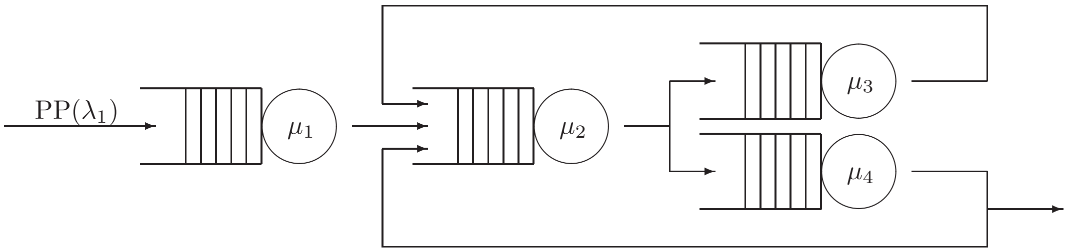
10. Übung zu Kommunikationsnetze II

Prof. Dr.-Ing. Anke Schmeink, Henning Maier, Gernot Fabeck

05.07.2010

Aufgabe 1. Gegeben sei das folgende offene Jackson-Netz:



Die Bedienzeiten seien exponentialverteilt mit Erwartungswerten

$$\frac{1}{\mu_1} = 0.05 \text{ s}, \quad \frac{1}{\mu_2} = 0.04 \text{ s}, \quad \frac{1}{\mu_3} = 0.03 \text{ s}, \quad \frac{1}{\mu_4} = 0.06 \text{ s}.$$

Der Ankunftsprozess sei ein Poisson-Prozess mit Parameter $\lambda = \lambda_1 = 4$ Jobs/s. Ferner seien die Routing-Wahrscheinlichkeiten gegeben durch:

$$r_{12} = r_{32} = 1, \quad r_{23} = r_{24} = 0.5, \quad r_{42} = 0.6, \quad r_{40} = 0.4.$$

a) Berechnen Sie die stationäre Verteilung.

b) Das System befinde sich im stationären Zustand. Berechnen Sie für jede Station die folgenden Größen:

  (i) Auslastung,

  (ii) mittlere Anzahl von Anforderungen,

  (iii) mittlere Verweilzeit,

  (iv) mittlere Wartezeit,

  (v) mittlere Länge der Warteschlange.

Aufgabe 2. Es sei $\boldsymbol{X}(t) = (X_1(t), ..., X_J(t))$ der beschreibende Markoff-Prozess eines offenen Jackson-Netzes mit Fluss $\boldsymbol{\Lambda} = (\Lambda_1, ..., \Lambda_J)$ und Routingmatrix $\boldsymbol{R}$, wobei $r_{ii} = 0$ für alle $i = 1, ..., J$ gelte. Man fasse die Stationen K bis J zu einer Station K auf folgende Weise zusammen:

Es sei $\widetilde{\boldsymbol{X}}(t) = (\widetilde{X}_1(t), ..., \widetilde{X}_K(t))$, $K < J$, der beschreibende Markoff-Prozess des offenen Jackson-Netzes mit K Stationen und die Matrix $\widetilde{\boldsymbol{R}} \in \mathbb{R}^{(K+1)\times(K+1)}$ sei definiert durch:

$$\widetilde{r}_{ij} = \begin{cases} \frac{\sum_{k=K}^{J} \Lambda_k r_{kj}}{\sum_{k=K}^{J} \Lambda_k} & \text{für} \quad i = K, \quad j \in \{0, ..., K-1\} \\ \sum_{k=K}^{J} r_{ik} & \text{für} \quad i \in \{0, ..., K-1\}, \quad j = K \\ \frac{\sum_{k=K}^{J} \Lambda_k \sum_{j=K}^{J} r_{kj}}{\sum_{k=K}^{J} \Lambda_k} & \text{für} \quad i = j = K \\ r_{ij} & \text{für} \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass durch $\widetilde{\boldsymbol{R}}$ ebenfalls eine Routingmatrix definiert wird und dass für den Fluss $\widetilde{\boldsymbol{\Lambda}} = (\widetilde{\Lambda}_1, ..., \widetilde{\Lambda}_K)$ von $\widetilde{\boldsymbol{X}}(t)$ gilt:

$$\widetilde{\Lambda}_i = \Lambda_i \quad \text{für } i \in \{1, ..., K-1\},$$
$$\widetilde{\Lambda}_K = \sum_{k=K}^{J} \Lambda_k.$$