5. Übung zu Kommunikationsnetze II

Prof. Dr.-Ing. Anke Schmeink, Henning Maier, Gernot Fabeck

31.05.2010

Aufgabe 1. Ein Puffer besitze eine maximale Kapazität von r Paketen. Zu den Zeitpunkten $n \in \mathbb{N}$ komme mit Wahrscheinlichkeit $\alpha \in [0,1]$ ein neues Paket an. Falls der Puffer noch freie Kapazität aufweist, wird das Paket angenommen, ansonsten wird es abgewiesen. Entsprechend werde zu diesen Zeitpunkten mit Wahrscheinlicheit $\beta \in [0,1]$ ein bereits im Puffer befindliches Paket weitergeschickt. Das Ankommen neuer und das Verschicken bereits im Puffer befindlicher Pakete sei stochastisch unabhängig. Es sei X_n die Anzahl der Pakete im Puffer zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}_0$ nach zufälligem Zu- und Abgang, $X_0 = s \leq r$.

a) Geben Sie Zustandsraum, Übergangsgraph und Übergangsmatrix der Markov-Kette $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ an.

b) Wie lauten die globalen Gleichgewichtsgleichungen?

c) Berechnen Sie für $r = 3$, $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$ die stationäre Verteilung der Markov-Kette.

Aufgabe 2. Die Markov-Kette $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschreibe eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$. Für $j \in \mathbb{Z}$ und die Zeitschritte $n \in \mathbb{N}_0$ gelten dabei die Übergangswahrscheinlichkeiten nach rechts $P(X_{n+1} = j+1|X_n = j) = p$ und nach links $P(X_{n+1} = j-1|X_n = j) = 1-p =: q$, wobei p in $0 \leq p \leq 1$ liegt. Der initiale Zustand lautet $X_0 = 0$.

a) Geben Sie Zustandsraum, Übergangsgraph und Übergangsmatrix der Markov-Kette $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ an. Für welche p ist diese Markov-Kette irreduzibel?

b) Seien die Zufallsvariablen $Y_i = X_i - X_{i-1}$ die Differenzen aufeinander folgender Zustände. Deren Summe zum Zeitpunkt n sei $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. Welche Werte können Y_i und Z_n annehmen und wie sind Y_i, Z_n und X_n verteilt?

c) Bestimmen Sie für die Markov-Kette $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ die n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit $p_{00}^{(n)}$.

d) Zeigen Sie mit Proposition 3.9, dass diese Markov-Kette für die symmetrische Übergangswahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$ rekurrent und sonst transient ist.

e) Zeigen Sie mit Definition 3.7, dass diese Markov-Kette für $p = \frac{1}{2}$ rekurrent und sonst transient ist. Verwenden Sie dazu die Rückkehrwahrscheinlichkeit $f_{00}^{(2n)} = 2c_{n-1}(pq)^n$ und $f_{00}^{(2n+1)} = 0$ mit c_n aus dem Hinweis. Diese Aufgabe ist unabhängig von den übrigen Unterpunkten lösbar.

Hinweis zu d): Nutzen Sie an Stelle der Fakultät die Näherung durch die Stirlingformel: $n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Die allgemeine harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert mit dem Parameter $\alpha > 1$ und divergiert mit $\alpha \leq 1$.

Hinweis zu e): Verwenden Sie für die sog. catalanschen Zahlen c_n die erzeugende Funktion: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$.