4. Übung zu Kommunikationsnetze: Analyse und Leistungsbewertung

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Simon Görtzen, Christoph Schmitz

16.5.2011

Aufgabe 1. Es sei $\mathcal{S}$ ein unendlicher, aber abzählbarer Zustandsraum, und es seien $\boldsymbol{\Pi} = (p_{ij})_{i,j\in\mathcal{S}}$ und $\boldsymbol{\Phi} = (q_{ij})_{i,j\in\mathcal{S}}$ stochastische Matrizen und $\boldsymbol{v} = (v_i)_{i\in\mathcal{S}}$ ein stochastischer Vektor.

a) Zeigen Sie, dass für alle $i, j \in \mathcal{S}$ die Reihen

$$\sum_{l\in\mathcal{S}} p_{il}q_{lj} \qquad \text{und} \qquad \sum_{l\in\mathcal{S}} v_l p_{lj}$$

konvergieren.

b) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{\Pi\Phi}$ mit

$$(\boldsymbol{\Pi\Phi})_{ij} = \sum_{l\in\mathcal{S}} p_{il}q_{lj}$$

wieder eine stochastische Matrix ist, und dass $\boldsymbol{v\Pi}$ mit

$$(\boldsymbol{v\Pi})_j = \sum_{l\in\mathcal{S}} v_l p_{lj}$$

ein stochastischer Vektor ist.

c) Zeigen Sie, dass allgemein (auch für endlichen Zustandsraum) gilt: Existiert

$$\boldsymbol{p}^* = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}(n)$$

unabhängig von der Anfangsverteilung $\boldsymbol{p}(0)$, so ist $\boldsymbol{p}^*\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{p}^*$. Eine Grenzverteilung ist also, wenn sie existiert, stets auch eine stationäre Verteilung.

Aufgabe 2. Die Zufallsvariablen $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ seien stochastisch unabhängig und identisch verteilt mit $P(Y_i = 1) = p$ und $P(Y_i = -1) = 1 - p$. Ferner sei $X_n = 2Y_n + Y_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Geben Sie den Zustandsraum und den Übergangsgraphen der Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ an.

Aufgabe 3. Auf einem Kanal werden übertragene Bits symmetrisch gestört, d.h. Einsen und Nullen werden mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gestört. Ist ein Bit fehlerfrei übertragen worden, so ist das darauf folgende Bit mit Wahrscheinlichkeit p_0 gestört. Ist ein Bit gestört übertragen worden, so ist das darauf folgende Bit mit Wahrscheinlichkeit p_1 nicht gestört.

a) Geben Sie ein geeignetes Markov-Modell zur Beschreibung des Übertragungskanals an.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist im stationären Zustand ein übertragenes Bit gestört?

Eine Gruppe aufeinander folgender gestörter Bits, die durch ungestörte Bits begrenzt wird, heißt *Störbüschel*.

c) Wie sieht die Verteilung der Zufallsvariablen Y aus, welche die Anzahl der gestörten Bits in einem Störbüschel beschreibt?

d) Wie groß ist die erwartete Anzahl gestörter Bits in einem Störbüschel?

Hinweis: Benutzen Sie, dass gilt $\sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} = \left(\frac{1}{1-z}\right)^2$ für alle $|z| < 1$.