5. Übung zu Kommunikationsnetze: Analyse und Leistungsbewertung

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Simon Görtzen, Christoph Schmitz

23.5.2011

Aufgabe 1. Es sei $\mathbf{\Pi}(t)$ die Übergangsmatrix eines homogenen Markov-Prozesses $(X_t)_{t\geq 0}$mit Zustandsraum $\mathcal{S}$, d.h. es ist

$$P(X_{s+t} = j | X_s = i) = (\mathbf{\Pi}(t))_{ij}$$

für alle $s, t \geq 0$, $i, j \in \mathcal{S}$.

a) Zeigen Sie, dass für $t \geq 0$ die Verteilung $\boldsymbol{p}(t)$ von X_t als

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}(0) \cdot \mathbf{\Pi}(t)$$

aus der Anfangsverteilung $\boldsymbol{p}(0)$ von X_0 berechnet werden kann.

b) Zeigen Sie für $r, t \geq 0$ die *Chapman-Kolmogorov-Gleichung* für Markov-Prozesse

$$\mathbf{\Pi}(r + t) = \mathbf{\Pi}(r) \cdot \mathbf{\Pi}(t).$$

Aufgabe 2. Betrachten Sie einen homogenen Markov-Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ mit Zustandsraum $\mathcal{S} = \{1, 2\}$ und Intensitätsmatrix

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda, \mu \geq 0$ und $\lambda + \mu > 0$.

a) Bestimmen Sie $\mathbf{\Pi}(t)$.

b) Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus a) die Wahrscheinlichkeiten

$$P(X_t = 2 | X_0 = 1, X_{3t} = 1) \quad \text{und} \quad P(X_t = 2 | X_0 = 1, X_{3t} = 1, X_{4t} = 1).$$

c) Geben Sie den Intensitätsgraphen des Markov-Prozesses und den Übergangsgraphen der eingebetteten Markov-Kette an.

d) Berechnen Sie die stationäre Verteilung des Markov-Prozesses.

e) Was kann man über das asymptotische Verhalten der eingebetteten Markov-Kette sagen?