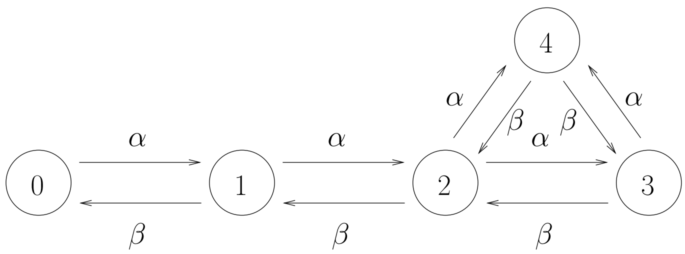
Zusatzübung zu Kommunikationsnetze: Analyse und Leistungsbewertung

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Simon Görtzen, Christoph Schmitz

22.7.2011

Aufgabe 1. Betrachten Sie zunächst den folgenden Intensitätsgraphen eines Markov-Prozesses mit den Intensitäten $\alpha > 0$ und $\beta > 0$, wobei $\alpha \neq \beta$ gilt.



(a) Geben Sie für den abgebildeten Markov-Prozess den Zustandsraum und die Intensitätsmatrix an.

(b) Berechnen Sie die Übergangsmatrix der eingebetteten Markov-Kette und zeichnen Sie den Übergangsgraphen.

(c) Berechnen Sie die Zustandswahrscheinlichkeiten der eingebetteten Markov-Kette mit der Anfangsverteilung $p_0(0) = 1$ nach $n = 1, 2, 3$ Zeitschritten.

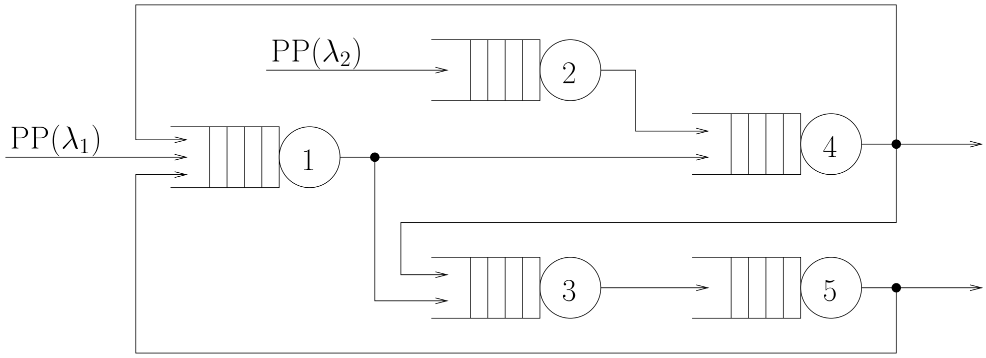
(d) Ist die eingebettete Markov-Kette reduzibel oder irreduzibel, rekurrent oder transient, und ist sie periodisch oder aperiodisch? Begründen Sie Ihre jeweilige Zuordnung.

(e) Berechnen Sie die stationäre Verteilung des Markov-Prozesses für $\alpha = 1$ und $\beta = 2$.

Nun wird ein Server S mit zwei parallelen Warteschlangen W_1 und W_2 und der Bedienrate $\mu > 0$ untersucht. Die Warteschlangen W_1 und W_2 besitzen jeweils die Wartekapazitäten $K_1 = 1$ und $K_2 = 2$. Ankommende Anforderungen werden durch einen Poisson-Prozess $\mathrm{PP}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$ beschrieben. Befindet sich keine Anforderung im System, bearbeitet Server S die ankommende Anforderung direkt. Ist Server S beschäftigt, werden ankommende Anforderungen gleichverteilt zur Warteschlange W_1 oder W_2 hinzugefügt. Wenn eine ankommende Anforderung auf eine vollständig belegte Warteschlange trifft, wird diese Anforderung verworfen. Wenn beide Warteschlangen jeweils mit mindestens einer Anforderung belegt sind, wählt Server S gleichverteilt eine Anforderung von einer der beiden Warteschlangen aus. Andernfalls wählt Server S eine Anforderung von der als Einziges belegten Warteschlange.

(f) Modellieren Sie das gegebene System durch einen geeigneten Markov-Prozess und geben Sie den Zustandsraum, den Intensitätsgraphen und die Intensitätsmatrix an.

Aufgabe 2. Gegeben sei das folgende Warteschlangennetz mit $J = 5$ Stationen:



Die Stationen 1 bis 3 seien jeweils $M/M/1/\infty$-Systeme mit Bedienraten $\mu_1 = 8$, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = 5$, die Station 4 sei ein $M/M/\infty$-System mit Bedienrate $\mu_4 = 1$ und die Station 5 sei ein $M/M/2/\infty$-System mit Bedienrate $\mu_5 = 5$.

Die Intensitäten der Ankunftsprozesse seien $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$. Die Routingwahrscheinlichkeiten seien so festgelegt, dass aus den bestehenden Verbindungen mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt wird.

(a) Geben Sie die Routingmatrix $\boldsymbol{R}$ des offenen Jackson-Netzes an.

(b) Berechnen Sie die Lösung $\boldsymbol{\Lambda}^*$ der Flussgleichungen des offenen Jackson-Netzes.

(c) Berechnen Sie die stationäre Verteilung $\boldsymbol{p}^*(\boldsymbol{n})$ des offenen Jackson-Netzes.

(d) Wie hoch ist im stationären Zustand die Wahrscheinlichkeit, dass eine neu ankommende Anforderung an Station 5 in der Warteschlange warten muss und wie groß ist die erwartete Warteschlangenlänge?

Es liege nun ein geschlossenes Jackson-Netz mit $M = 3$ Anforderungen vor, d.h., es sei $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ und es gebe keine Abgänge in die Außenwelt. Die Stationen 4 und 5 werden durch $M/M/1/\infty$-Bedienstationen ersetzt mit den gleichen Bedienraten wie oben. Die Routingwahrscheinlichkeiten seien wiederum so gewählt, dass aus den jetzt bestehenden Verbindungen zwischen Stationen mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt wird.

(e) Berechnen Sie die Routingmatrix $\boldsymbol{R}$ des geschlossenen Jackson-Netzes.

(f) Berechnen Sie die stationäre Verteilung $\boldsymbol{p}^*(\boldsymbol{n})$ des geschlossenen Jackson-Netzes. Verwenden Sie dabei diejenige Lösung $\boldsymbol{\Lambda}^*$ der Flussgleichungen, deren Komponenten ganzzahlig sind und deren Summe 12 ergibt.

(g) Wie hoch ist der Durchsatz an Station 4 im stationären Zustand? Wie hoch ist die Auslastung von Station 5 im stationären Zustand?