4. Übung zu Kommunikationsnetze: Analyse und Leistungsbewertung

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Dr. Michael Reyer

14.5.2012

Aufgabe 1. Die Zufallsvariablen $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ seien stochastisch unabhängig und identisch verteilt mit $P(Y_i = 1) = p$ und $P(Y_i = -1) = 1 - p$. Ferner sei $X_n = 2Y_n + Y_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Geben Sie den Zustandsraum und den Übergangsgraphen der Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ an.

Aufgabe 2. Gegeben sei ein kooperatives Relaynetzwerk, in dem einzelne Pakete von Station 1 nach Station 4 gesendet werden sollen. Je nachdem wie der Übertragungskanal zum Zeitschritt n beschaffen ist, sendet Station 1 das Paket mit der Wahrscheinlichkeit p_{12} an Station 2, mit Wahrscheinlichkeit p_{13} an Station 3 oder mit Wahrscheinlichkeit p_{14} direkt an Station 4. Die Relaystation 2 leitet das Paket mit p_{23} an Station 3 und mit p_{24} an Station 4 weiter. Die Relaystation 3 leitet das Paket mit p_{34} an Station 4 weiter. Eine einzelne Übertragung dauert einen Zeitschritt. Wenn das Paket sein Ziel erreicht hat, sendet Station 4 eine Bestätigung, welche einen ganzen Zeitschritt dauert, und Station 1 kann im nächsten Zeitschritt mit der Übertragung eines neuen Paketes beginnen. Für die Wahrscheinlichkeiten gilt: $p_{12} = \frac{1}{2}, p_{13} = \frac{1}{3}, p_{14} = \frac{1}{6}, p_{23} = \frac{3}{4}, p_{24} = \frac{1}{4}, p_{34} = 1, p_{41} = 1$.

a) Beschreiben Sie dieses System durch eine Markov-Kette $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und geben Sie den Zustandsraum, den Übergangsgraphen und die Übergangsmatrix an.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit braucht ein Paket 1, 2, 3, 4 oder 5 Zeitschritte?

c) Wie lange dauert es im Mittel, bis Station 1 ein neues Paket übertragen kann?

d) Ist das System irreduzibel und ist es periodisch oder aperiodisch? Geben Sie die Perioden für jeden Zustand an.

e) Ist das System rekurrent oder transient? Begründen Sie!

f) Wie lautet, falls vorhanden, die stationäre Verteilung p_1^* an Station 1?

- bitte wenden -

Aufgabe 3. Ein fairer Würfel werde wiederholt geworfen und die Augenzahl notiert, falls sie ungleich der zuletzt notierten Augenzahl ist.

a) Wie lautet die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die nächste notierte Augenzahl, falls die vorangegangene Augenzahl eine Eins war?

b) Modellieren Sie die notierten Augenzahlen in geeigneter Weise als Markov-Kette durch Angabe des Zustandsraums S und der Übergangsmatrix Π.

c) Bestimmen Sie für einen vierseitigen Würfel die Wahrscheinlichkeit, dass die n-te notierte Augenzahl eine Eins ist, falls im ersten Versuch eine Eins gefallen ist.

Hinweis zum letzten Aufgabenteil:

- Die Benutzung eines Computers ist zu empfehlen.
- Für die Übergangsmatrix Π gilt: $\Pi = S\,D\,S^{-1}$ mit

$$D = \operatorname{diag}(1, -1/3, -1/3, -1/3)\,,\; S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$