Zusatzübung zu Kommunikationsnetze: Analyse und Leistungsbewertung

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Dr. Michael Reyer, Christoph Schmitz

17.7.2012

Aufgabe 1. Gegeben sei eine Bedienstation mit zwei Servern jeweils mit Bedienrate $\mu > 0$ und einer unendlich langen Warteschlange, an der die Anforderungen gemäß einem Poissonprozess mit Intensität $\lambda > 0$ ankommen. Ist einer der Server frei, so werden ankommende oder wartende Anforderungen sofort bedient.

a) Berechnen Sie für $\lambda = 4$ und $\mu = 3$ die stationäre Verteilung und den Erwartungswert der Anzahl der Anforderungen in der Bedienstation. Beachten Sie dazu den Hinweis am Ende der Aufgabenstellung. Um was für ein Bediensystem handelt es sich?

Nach dem Ausfall eines Servers wird dieser durch ein leistungsschwächeres Reservesystem mit Bedienrate $\mu' \in (0, \mu)$ ersetzt. Sind beide Server frei, so werden ankommende Anforderungen an den verbliebenen normalen Server geschickt, ansonsten an das Reservesystem oder, falls dieses auch beschäftigt ist, in die Warteschlange.

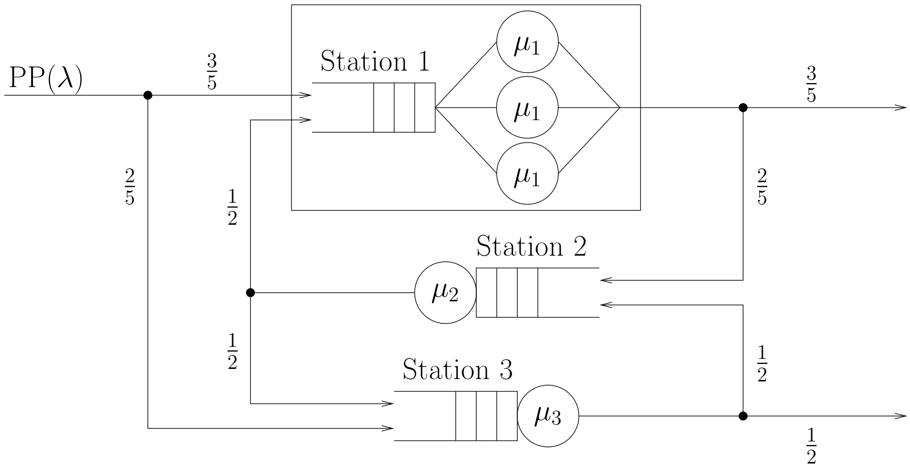
b) Modellieren Sie die modifizierte Bedienstation als Markov-Prozess. Geben Sie den Zustandsraum und den Intensitätsgraphen an.
Hinweis: Die Anzahl der Anforderungen in der Bedienstation reicht in diesem Fall nicht mehr aus, um den Zustand des Markov-Prozesses zu beschreiben. In genau einem Fall ist eine weitere Unterscheidung notwendig, was einen zusätzlichen Zustand erfordert.

c) Es sei nun $\lambda = 4$, $\mu = 3$ und $\mu' = 2$. Geben Sie die Intensitätsmatrix für diese Parameterkombination an. Berechnen Sie die stationäre Verteilung und den Erwartungswert der Anzahl der Anforderungen in der Bedienstation.

Hinweis: Für alle $0 < q < 1$ gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot q^{i-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Aufgabe 2. Gegeben sei folgendes Warteschlangennetz mit $J = 3$ Stationen:



Station 1 ist ein $M/M/3/\infty$-System mit Bedienrate $\mu_1 = 2$, die anderen beiden Stationen sind $M/M/1/\infty$-Systeme mit Bedienrate $\mu_2 = \mu_3 = 6$. Der Ankunftsprozess ist ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$, die Routingparameter sind in der Skizze angegeben. Offenbar kann dieses Warteschlangennetz als offenes Jackson-Netz modelliert werden.

a) Geben Sie den Zustandsraum und die Routingmatrix an.

b) Lösen Sie die Flussgleichungen.

Im Folgenden sei die Ankunftsintensität $\lambda = 5$.

c) Verifizieren Sie, dass eine stationäre Verteilung existiert, und bestimmen Sie diese.

d) Berechnen Sie die jeweilige Auslastung der drei Stationen, also die Wahrscheinlichkeit, dass sich in der jeweiligen Station mindestens eine Anforderung befindet.

Um Kosten zu sparen, erhalten die drei Server in Station 1 nun ein gemeinsames Filesystem. Da dieses bei parallelem Zugriff mehrerer Server an seine Leistungsgrenzen stößt, verringern sich die Bedienraten an Station 1 auf $\mu_1(1) = 2$, $\mu_1(2) = 3$ und $\mu_1(i) = 4$ für $i \geq 3$. Der Rest des Netzes wird nicht verändert.

e) Existiert immer noch eine stationäre Verteilung? Wenn ja, geben Sie diese an.

Das Warteschlangennetz wird jetzt zu einem geschlossenen Jackson-Netz modifiziert. Der Fluss aus der Außenwelt in das Netz entfällt, und die Abgänge aus den Stationen 1 und 3 werden in die Station 2 zurückgeführt, es ist jetzt also $r_{12} = 1$ und $r_{32} = 1$. Ansonsten bleibt das Netz so wie im vorherigen Aufgabenteil. Es befinden sich $M = 3$ Anforderungen im Netz.

f) Skizzieren Sie das geschlossene Jackson-Netz analog zur obigen Skizze. Zur Vereinfachung dürfen Sie die Station 1 dabei weiterhin als $M/M/3/\infty$-System darstellen.

g) Geben Sie den Zustandsraum und die Routingmatrix des geschlossenen Jackson-Netzes an. Wie groß ist der Zustandsraum?

h) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung.