

6. Übung zu Kommunikationsnetze: Analyse und Leistungsbewertung

Dr. Michael Reyer, Dipl.-Inform. Florian Schröder

3.6.2013

Aufgabe 1. Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_k seien stochastisch unabhängig exponentialverteilt mit den Parametern $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$, also $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i), 1 \leq i \leq k$.

- Zeigen Sie, dass das Minimum $Y = \min\{X_1, \dots, X_k\}$ ebenfalls exponentialverteilt ist mit dem Parameter $\lambda_1 + \dots + \lambda_k$.
- Zeigen Sie, dass

$$P(X_i = Y) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k}$$

für $1 \leq i \leq k$. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Zufallsvariable X_i das Minimum Y darstellt, ist also der Quotient aus dem Parameter λ_i und der Summe aller Parameter $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Aufgabe 2. Betrachten Sie einen homogenen Markov-Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ mit Zustandsraum $\mathcal{S} = \{1, 2\}$ und Intensitätsmatrix

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix},$$

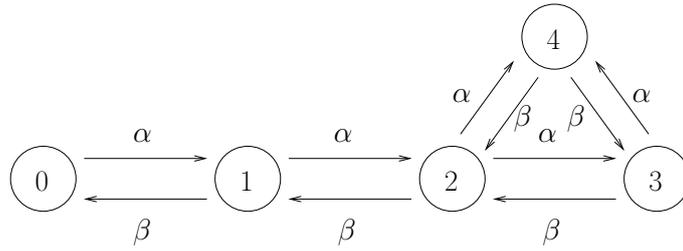
wobei $\lambda, \mu \geq 0$ und $\lambda + \mu > 0$.

- Bestimmen Sie $\mathbf{\Pi}(t)$.
- Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus **a)** die Wahrscheinlichkeiten

$$P(X_t = 2 \mid X_0 = 1, X_{3t} = 1) \quad \text{und} \quad P(X_t = 2 \mid X_0 = 1, X_{3t} = 1, X_{4t} = 1).$$

- Geben Sie den Intensitätsgraphen des Markov-Prozesses und den Übergangsgraphen der eingebetteten Markov-Kette an.
- Berechnen Sie die stationäre Verteilung des Markov-Prozesses.
- Was kann man über das asymptotische Verhalten der eingebetteten Markov-Kette sagen?

Aufgabe 3. Betrachten Sie zunächst den folgenden Intensitätsgraphen eines Markov-Prozesses mit den Intensitäten $\alpha > 0$ und $\beta > 0$.



- Geben Sie für den abgebildeten Markov-Prozess den Zustandsraum und die Intensitätsmatrix an.
- Berechnen Sie die Übergangsmatrix der eingebetteten Markov-Kette und zeichnen Sie den Übergangsgraphen.
- Berechnen Sie die Zustandswahrscheinlichkeiten der eingebetteten Markov-Kette mit der Anfangsverteilung $p_0(0) = 1$ nach $n = 1, 2, 3$ Zeitschritten.
- Ist die eingebettete Markov-Kette reduzibel oder irreduzibel, rekurrent oder transient, und ist sie periodisch oder aperiodisch? Begründen Sie Ihre jeweilige Zuordnung.
- Berechnen Sie die stationäre Verteilung des Markov-Prozesses für $\alpha = 1$ und $\beta = 2$.