9. Übung zu Kommunikationsnetze: Analyse und Leistungsbewertung

Dr. Michael Reyer, Dipl.-Inform. Florian Schröder

24.6.2013

Aufgabe 1. Gegeben sei eine Bedienstation mit zwei Servern jeweils mit Bedienrate $\mu > 0$ und einer unendlich langen Warteschlange, an der die Anforderungen gemäß einem Poissonprozess mit Intensität $\lambda > 0$ ankommen. Ist einer der Server frei, so werden ankommende oder wartende Anforderungen sofort bedient.

a) Berechnen Sie für $\lambda = 4$ und $\mu = 3$ die stationäre Verteilung und den Erwartungswert der Anzahl der Anforderungen in der Bedienstation. Beachten Sie dazu den Hinweis am Ende der Aufgabenstellung. Um was für ein Bediensystem handelt es sich?

Nach dem Ausfall eines Servers wird dieser durch ein leistungsschwächeres Reservesystem mit Bedienrate $\mu' \in (0, \mu)$ ersetzt. Sind beide Server frei, so werden ankommende Anforderungen an den verbliebenen normalen Server geschickt, ansonsten an das Reservesystem oder, falls dieses auch beschäftigt ist, in die Warteschlange.

b) Modellieren Sie die modifizierte Bedienstation als Markov-Prozess. Geben Sie den Zustandsraum und den Intensitätsgraphen an.
Hinweis: Die Anzahl der Anforderungen in der Bedienstation reicht in diesem Fall nicht mehr aus, um den Zustand des Markov-Prozesses zu beschreiben. In genau einem Fall ist eine weitere Unterscheidung notwendig, was einen zusätzlichen Zustand erfordert.

c) Es sei nun $\lambda = 4$, $\mu = 3$ und $\mu' = 2$. Geben Sie die Intensitätsmatrix für diese Parameterkombination an. Berechnen Sie die stationäre Verteilung und den Erwartungswert der Anzahl der Anforderungen in der Bedienstation.

Hinweis: Für alle $0 < q < 1$ gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot q^{i-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Aufgabe 2. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Wartezeit W_Q^* in der Warteschlange eines $M/M/1$-Systems mit Ankunftsintensität λ und Bedienintensität μ durch die Verteilungsfunktion

$$P(W_Q^* \leq z) = 1 - \rho e^{-(\mu-\lambda)z}$$

beschrieben wird, wobei $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ die Auslastung des Systems ist.

a) Zeigen Sie, dass sich der Erwartungswert und die Varianz von W_Q^* als

$$\mathrm{E}(W_Q^*) = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

und

$$\mathrm{Var}(W_Q^*) = \frac{2\rho - \rho^2}{\mu^2(1-\rho)^2}$$

ergeben.

b) Ferner wurde gezeigt, dass sich die Verteilungsfunktion der Antwortzeit W^* als

$$P(W^* \leq z) = \int_0^z P(W_Q^* \leq z - y)\mu e^{-\mu y}\,\mathrm{d}y$$

ausdrücken lässt. Verifizieren Sie, dass sich daraus

$$P(W^* \leq z) = 1 - e^{-(\mu-\lambda)z}$$

ergibt.

Aufgabe 3. In einer Probe entstehen Atome eines bestimmten Nuklids durch den Zerfall eines Vorgängernuklids oder einen anderen kernphysikalischen Prozess. Wir nehmen an, dass diese Neubildungen durch einen Poisson-Prozess mit konstanter Rate λ beschrieben werden können, was beispielsweise beim Zerfall eines Vorgängernuklids mit langer Halbwertszeit plausibel ist. Da das neugebildete Nuklid auch radioaktiv ist, zerfällt jedes neugebildete Atom unabhängig von den anderen nach einer exponentialverteilten Zeit. Dabei beschreibt die *Halbwertszeit* $t_{\frac{1}{2}}$ diejenige Zeitspanne, nach der im Mittel die Hälfte der anfangs vorhandenen Atome zerfallen ist. Sie ist für alle Atome eines Nuklids identisch.

a) Durch welches Markovsche Bediensystem kann dieser Vorgang modelliert werden? Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Halbwertszeit $t_{\frac{1}{2}}$ und der Bedienrate μ?

b) In einer Gesteinsprobe, die Uranerz enthält, entstehen pro Sekunde im Mittel 5 neue Atome des Radonisotops ^{219}Rn. Diese zerfallen selber mit einer Halbwertszeit von 3.96 Sekunden. Wie ist die Anzahl der ^{219}Rn-Atome in der Probe verteilt? Wieviele Atome sind im Mittel in der Probe vorhanden? Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich im stationären Zustand überhaupt kein ^{219}Rn-Atom in der Probe?