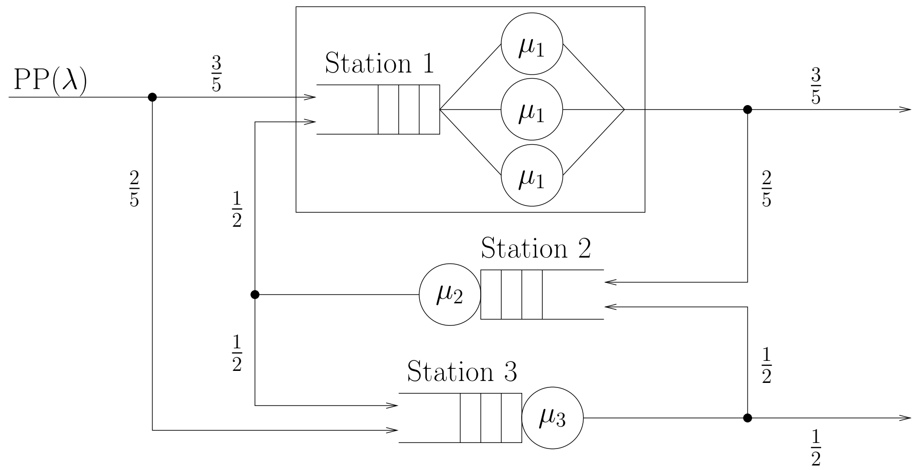
12. Übung zu Kommunikationsnetze: Analyse und Leistungsbewertung

Dr. Michael Reyer, Dipl.-Inform. Florian Schröder

15.7.2013

Aufgabe 1. Gegeben sei folgendes Warteschlangennetz mit $J = 3$ Stationen:



Station 1 ist ein $M/M/3/\infty$-System mit Bedienrate $\mu_1 = 2$, die anderen beiden Stationen sind $M/M/1/\infty$-Systeme mit Bedienrate $\mu_2 = \mu_3 = 6$. Der Ankunftsprozess ist ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$, die Routingparameter sind in der Skizze angegeben. Offenbar kann dieses Warteschlangennetz als offenes Jackson-Netz modelliert werden.

a) Geben Sie den Zustandsraum und die Routingmatrix an.

b) Lösen Sie die Flussgleichungen.

Im Folgenden sei die Ankunftsintensität $\lambda = 5$.

c) Verifizieren Sie, dass eine stationäre Verteilung existiert, und bestimmen Sie diese.

d) Berechnen Sie die jeweilige Auslastung der drei Stationen, also die Wahrscheinlichkeit, dass sich in der jeweiligen Station mindestens eine Anforderung befindet.

Um Kosten zu sparen, erhalten die drei Server in Station 1 nun ein gemeinsames Filesystem. Da dieses bei parallelem Zugriff mehrerer Server an seine Leistungsgrenzen stößt, verringern sich die Bedienraten an Station 1 auf $\mu_1(1) = 2$, $\mu_1(2) = 3$ und $\mu_1(i) = 4$ für $i \geq 3$. Der Rest des Netzes wird nicht verändert.

e) Existiert immer noch eine stationäre Verteilung? Wenn ja, geben Sie diese an.

Das Warteschlangennetz wird jetzt zu einem geschlossenen Jackson-Netz modifiziert. Der Fluss aus der Außenwelt in das Netz entfällt, und die Abgänge aus den Stationen 1 und 3 werden in die Station 2 zurückgeführt, es ist jetzt also $r_{12} = 1$ und $r_{32} = 1$. Ansonsten bleibt das Netz so wie im vorherigen Aufgabenteil. Es befinden sich $M = 3$ Anforderungen im Netz.

f) Skizzieren Sie das geschlossene Jackson-Netz analog zur obigen Skizze. Zur Vereinfachung dürfen Sie die Station 1 dabei weiterhin als $M/M/3/\infty$-System darstellen.

g) Geben Sie den Zustandsraum und die Routingmatrix des geschlossenen Jackson-Netzes an. Wie groß ist der Zustandsraum?

h) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung.

Aufgabe 2. Gegeben sei ein geschlossenes Jackson-Netz mit J Stationen, bei denen es sich jeweils um $M/M/1/\infty$-Systeme mit Bedienraten $\mu_i > 0$ handelt. Es befinden sich M Anforderungen im Netz. Ferner sei $(\Lambda_1^*, \ldots, \Lambda_J^*)$ eine Lösung der Flussgleichungen, und

$$\gamma_i = \frac{\Lambda_i^*}{\mu_i}, \qquad C_l(j) = \begin{cases} \gamma_1^l & j = 1, \\ 1 & l = 0, \\ C_l(j-1) + \gamma_j C_{l-1}(j) & \text{sonst} \end{cases}$$

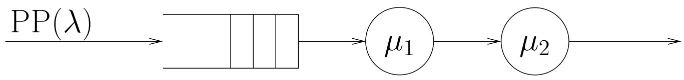
seien die Parameter aus dem in der Vorlesung vorgestellten Rekursionsschema. Das Netz werde durch den J-dimensionalen Markov-Prozess $\boldsymbol{X}^* = (X_1^*, \ldots, X_J^*)$ modelliert. Zeigen Sie, dass dann die komplementäre Verteilungsfunktion der i-ten Randverteilung als

$$\mathrm{P}(X_i^* \geq k) = \gamma_i^k \frac{C_{M-k}(J)}{C_M(J)}$$

berechnet werden kann.

Aufgabe 3. Die Bearbeitung von Aufträgen an einem Bediensystem mit zwei hintereinander geschalteten Servern lasse sich durch ein $M/G/1$-Bediensystem mit hypoexponentialverteilter Bedienzeit Y beschreiben, d.h. $Y \sim \mathrm{HoExp}(\mu_1, \mu_2)$. Es sei $\mu_1 = 2$ und $\mu_2 = 4$, und der Ankunftsprozess sei ein Poisson-Prozess $\mathrm{PP}(\lambda)$ mit Intensität $\lambda = 1$. Die Warteschlangendisziplin sei FIFO.

Skizze:



a) Wie lautet der Erwartungswert $\nu = \mathrm{E}(Y)$ der Bedienzeit Y?

b) Berechnen Sie für den stationären Zustand die mittlere Anzahl von Anforderungen im System $\mathrm{E}(X^*)$ und die mittlere Wartezeit $\mathrm{E}(W_Q^*)$.

c) Wie lauten $\mathrm{E}(X^*)$ und $\mathrm{E}(W_Q^*)$ für das $M/M/1$-System, welches den gleichen Erwartungswert der Bedienzeit wie das obige $M/G/1$-System besitzt?

d) Betrachten Sie nun ein $M/G/1/1$-System mit $Y \sim \mathrm{HoExp}(\mu_1, \mu_2)$ wie oben. Modellieren Sie dieses System als Markoff-Prozess, indem Sie für den Zustandsraum

$$\mathcal{S} = \{(0,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1)\}$$

den Intensitätsgraphen und die Intensitätsmatrix angeben. Berechnen Sie die stationäre Verteilung des zugehörigen Markoff-Prozesses.