Zusatzübung zu Kommunikationsnetze: Analyse und Leistungsbewertung

Dr. Michael Reyer, Dipl.-Inform. Florian Schröder

23.7.2013

Aufgabe 1. In einer Mensa treffen im Mittel 600 Studierende pro Stunde gemäß einem Poisson-Prozess ein.

a) Wie lautet die Verteilung für die Anzahl der Studierenden, die innerhalb des Zeitraums von t Minuten eintreffen? Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb von einer Minute maximal zwei Studierende ankommen?

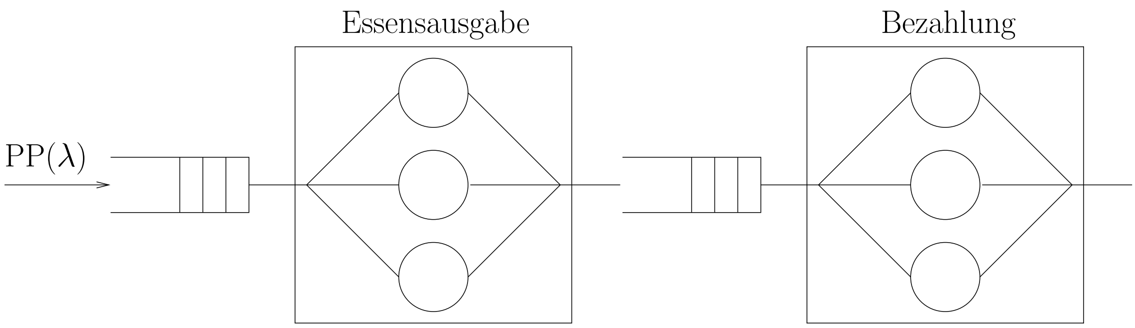
Die Mensa-Leitung überlegt, die Bezahlung und die Essensausgabe zu koppeln. Hierzu sollen die Mensa-Bediensteten an der Essensausgabe zunächst von der Mensakarte den fälligen Betrag abbuchen und dann das Essen ausgeben. Die Dauer der Bezahlung und der Ausgabe seien jeweils exponentialverteilt mit einer mittleren Dauer von 10 Sekunden. Nehmen Sie an, dass sich die Studierenden zufällig und unabhängig jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ für eine der vier Essensausgaben entscheiden. Ferner soll die Warteschlangenkapazität unbegrenzt sein.

b) Mit welchem Bediensystem lassen sich Bezahlung und Ausgabe des Essens an einer Essensausgabe gemeinsam modellieren? Welche Bedienzeitverteilung liegt vor?

c) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Bedienzeitverteilung mit Hilfe der Laplace-Transformierten.

d) Berechnen Sie im Gleichgewicht die Auslastung und den Erwartungswert der Verweilzeit unter der Annahme, dass der Erwartungswert der Anzahl an Studierenden $\frac{95}{24}$ beträgt.

Die Mensa-Leitung möchte nun das neue System mit dem folgenden System vergleichen. Es werden **drei** Theken an der Essensausgabe und **drei** Kassen für die Bezahlung betrachtet. Die ankommenden Studierenden wählen nach Möglichkeit eine freie Theke. Anderenfalls



sammeln Sie sich in einer zentralen Warteschlange. Nach der Essensausgabe begeben sich die Studierenden an eine freie Kasse oder sammeln sich in einer weiteren, zentralen Warteschlange. Frei werdende Theken und Kassen werden sofort von wartenden Studierenden in Anspruch genommen. μ_i bezeichne die Bedienintensität der Essensausgabe, wenn i Theken belegt sind, $i = 1, 2, 3$. Es gelte $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 8$, $\mu_3 = 18$. Alle Bedienzeiten seien exponentialverteilt.

e) Beschreiben Sie die Essensausgabe mit dem zugehörigen Intensitätsgraphen.

f) Wie lautet die stationäre Verteilung dieses Geburts- und Todesprozesses?

g) Beantworten Sie die folgende Fragen unter der Annahme, dass das System im Gleichgewicht ist.

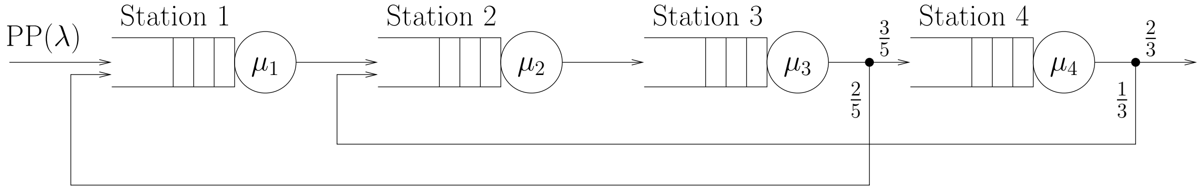
  i) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Essensausgabe leer ist?

  ii) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Theken mit Studierenden belegt sind?

  iii) Wie hoch ist die erwartete Anzahl von Studierenden an der Essensausgabe?

h) Berechnen Sie für die Systeme aus **b)** und **e)** jeweils eine obere Schranke für die Ankunftsintensitäten, für die noch eine stationäre Verteilung existiert. Nehmen Sie dabei an, dass im System aus **e)** die obere Schranke für die Essensausgabe auch für die Bezahlung gültig ist. Welches System sollte aus dieser Sicht bevorzugt werden?

Aufgabe 2. Gegeben sei folgendes Warteschlangennetz mit $J = 4$ Stationen:



Alle Stationen sind $M/M/1/\infty$-Systeme mit Bedienraten $\mu_i > 0$. Der Ankunftsprozess ist ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$. Die Routingparameter sind in der Skizze angegeben. Offenbar kann dieses Warteschlangennetz als Jackson-Netz modelliert werden.

a) Geben Sie den Zustandsraum und die Routingmatrix an.

b) Lösen Sie die Flussgleichungen.

Im Folgenden seien $\mu_1 = 6$, $\mu_2 = 15$, $\mu_3 = 10$, $\mu_4 = 18$ und $\lambda = 2$.

c) Verifizieren Sie, dass eine stationäre Verteilung existiert, und bestimmen Sie diese. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das Netz im Zustand $\boldsymbol{n} = (1, 0, 1, 0)$?

d) Wie groß ist die Auslastung der vier Stationen, also die Wahrscheinlichkeit, dass sich in der jeweiligen Station mindestens eine Anforderung befindet?

Das Warteschlangennetz wird jetzt zu einem geschlossenen Jackson-Netz modifiziert. Die Flüsse aus der Außenwelt in das Netz und der Fluss aus Station 4 in die Außenwelt fallen weg, es ist jetzt also $\lambda = 0$ und $r_{42} = 1$. Es befinden sich $M = 3$ Anforderungen im Netz.

e) Skizzieren Sie das geschlossene Jackson-Netz analog zur obigen Skizze.

f) Geben Sie den Zustandsraum und die Routingmatrix des geschlossenen Netzes an. Wie groß ist der Zustandsraum?

g) Bestimmen Sie diejenige Lösung der Flussgleichungen, bei der $\Lambda_1 = 6$ ist.

h) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Netz im Zustand $\boldsymbol{n} = (1, 0, 1, 0)$ befindet?

i) Berechnen Sie die jeweilige Auslastung der Stationen.