5. Übung zu Kommunikationsnetze: Analyse und Leistungsbewertung

Prof. Dr. Anke Schmeink, Michael Reyer

19.05.2014

Aufgabe 1. Es sei $\mathbf{\Pi}(t)$ die Übergangsmatrix eines homogenen Markov-Prozesses $(X_t)_{t\geq 0}$mit Zustandsraum $\mathcal{S}$, d. h. es ist

$$P(X_{s+t} = j \mid X_s = i) = (\mathbf{\Pi}(t))_{ij}$$

für alle $s, t \geq 0$, $i, j \in \mathcal{S}$.

a) Zeigen Sie, dass für $t \geq 0$ die Verteilung $\boldsymbol{p}(t)$ von X_t als

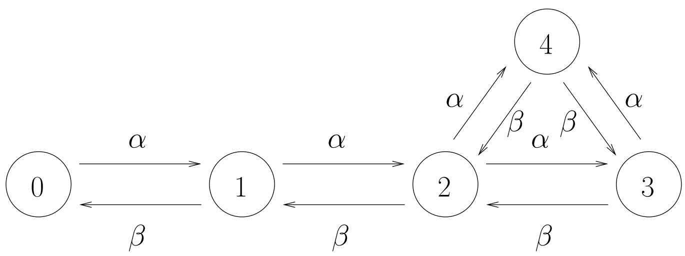
$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}(0) \cdot \mathbf{\Pi}(t)$$

aus der Anfangsverteilung $\boldsymbol{p}(0)$ von X_0 berechnet werden kann.

b) Zeigen Sie für $r, t \geq 0$ die *Chapman-Kolmogorov-Gleichung* für Markov-Prozesse

$$\mathbf{\Pi}(r + t) = \mathbf{\Pi}(r) \cdot \mathbf{\Pi}(t).$$

Aufgabe 2. Betrachten Sie zunächst den folgenden Intensitätsgraphen eines Markov-Prozesses mit den Intensitäten $\alpha > 0$ und $\beta > 0$.



a) Geben Sie für den abgebildeten Markov-Prozess den Zustandsraum und die Intensitätsmatrix an.

b) Berechnen Sie die Übergangsmatrix der eingebetteten Markov-Kette und zeichnen Sie den Übergangsgraphen.

c) Berechnen Sie die Zustandswahrscheinlichkeiten der eingebetteten Markov-Kette mit der Anfangsverteilung $p_0(0) = 1$ nach $n = 1, 2, 3$ Zeitschritten.

d) Ist die eingebettete Markov-Kette reduzibel oder irreduzibel, rekurrent oder transient, und ist sie periodisch oder aperiodisch? Begründen Sie Ihre jeweilige Zuordnung.

e) Berechnen Sie die stationäre Verteilung des Markov-Prozesses für $\alpha = 1$ und $\beta = 2$.