9. Übung zu Kommunikationsnetze: Analyse und Leistungsbewertung

Prof. Dr. Anke Schmeink, Michael Reyer

23.06.2014

Aufgabe 1. Betrachten Sie das in der Vorlesung vorgestellte System mit zwei Servern, das durch den Zustandsraum $\mathcal{S} = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$ und die Intensitätsmatrix

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda+\mu_1) & 0 & \lambda \\ \mu_2 & 0 & -(\lambda+\mu_2) & \lambda \\ 0 & \mu_2 & \mu_1 & -(\mu_1+\mu_2) \end{pmatrix}$$

charakterisiert wird. Es beschreibt ein System ohne Warteschlange, bei dem die gemäß einem Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$ ankommenden Anforderungen an den ersten Server geleitet werden, falls dieser frei ist. Sonst gelangen sie an den zweiten Server oder werden abgewiesen, wenn beide Server beschäftigt sind. Die Bedienzeiten des i-ten Servers sind exponentialverteilt mit dem Parameter $\mu_i > 0$.

a) Weisen Sie nach, dass

$$\begin{aligned} p^*_{(0,0)} &= \frac{\mu_1\mu_2}{D}(2\lambda+\mu_1+\mu_2), \\ p^*_{(1,0)} &= \frac{\lambda\mu_2}{D}(\lambda+\mu_1+\mu_2), \\ p^*_{(0,1)} &= \frac{\lambda^2\mu_1}{D}, \\ p^*_{(1,1)} &= \frac{\lambda^2}{D}(\lambda+\mu_2) \end{aligned}$$

mit

$$D = \mu_1\mu_2(2\lambda+\mu_1+\mu_2) + \lambda^2\mu_1 + \lambda\mu_2(\lambda+\mu_1+\mu_2) + \lambda^2(\lambda+\mu_2)$$

die stationäre Verteilung dieses Systems darstellt.

b) Geben Sie die stationäre Verteilung für den Fall $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ an, und vergleichen Sie sie mit der stationären Verteilung eines $M/M/2/0$-Systems mit Ankunftsintensität λ und Bedienintensität μ.

Aufgabe 2. In der Vorlesung wurde das Beispiel „Modellierung eines ATM-Knotens“ betrachtet. In diesem Bediensystem gibt es Anforderungen, die teilweise eine geringe Verlustwahrscheinlichkeit (LL-Anforderungen) und teilweise eine geringe Antwortzeit (LD-Anforderungen) haben sollen. In der Vorlesung wurde eine Möglichkeit vorgestellt, die Verlustwahrscheinlichkeit der LL-Anforderungen zu verringern. Hier soll nun untersucht werden, inwiefern die Antwortzeit der LD-Anforderungen verringert werden kann. Dazu sollen die LL- und LD-Anforderungen gemäß einem Poisson-Prozess mit Intensitäten $\lambda_l > 0$ bzw. $\lambda_d > 0$ ankommen und an den Server geleitet werden. Die Bedienzeiten am Server seien exponentialverteilt mit Parameter $\mu > 0$ unabhängig von der Anforderung. Damit die Antwortzeit der einzelnen Anforderungen untersucht werden kann, wird im Zustandsraum die Anzahl der LD- und LL-Anforderungen n_d und n_l folgendermaßen dargestellt

$$S = \{(n_d, n_l) \mid n_d, n_l \in \mathbb{N}_0, n_d + n_l \leq k + 1\},$$

wobei $k \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl an Warteplätzen im System ist, die im Weiteren $k = 1$ sei. (Ferner werden die Warteplätze im Gegensatz zur Vorlesung nicht differenziert, d. h. es gilt $N = k$.) Wenn beide Typen an Anforderungen im System vorhanden sind, bearbeitet der Server mit Wahrscheinlichkeit $0 \leq p \leq 1$ eine LD-Anforderung. Dieses System soll als Markov-Prozess modelliert werden. Damit dies möglich ist, wird zu den Ankunftszeiten neuer Anforderungen die Bedienung einer anderen Anforderung zugelassen.

a) Geben Sie den Intensitätsgraphen des Systems an.

Dieses System soll für die Parameter $\lambda_l = 1, \lambda_d = 1, \mu = 4$ weiter untersucht werden.

b) Berechnen Sie die stationäre Verteilung des Markov-Prozess in Abhängigkeit von p.

Betrachten Sie im Folgenden jeweils die beiden Werte $p_1 = 0.5$ und $p_2 = 1$ für den Parameter p.

c) Geben Sie die stationären Verteilungen an.

d) Wie hoch sind die Verlustwahrscheinlichkeiten?

e) Berechnen Sie jeweils die erwartete Anzahl an LD-Anforderungen im System.

f) Welcher Wert ist zu bevorzugen, wenn die Antwortzeit der LD-Anforderungen geringer sein soll?