12. Übung zu Kommunikationsnetze: Analyse und Leistungsbewertung

Prof. Dr. Anke Schmeink, Michael Reyer, Alper Tokel

13.07.2015

Aufgabe 1. Ein stark belasteter Streckenabschnitt wird von verschiedenen Zugarten befahren, und zwar von S-Bahnen (S) und Güterzügen (G). Die Zugarten aufeinanderfolgender Züge seien stochastisch unabhängig. Bei einem eintreffenden Zug handelt es sich mit der Wahrscheinlichkeit von $\mathrm{P}(S) = 0.6$ um eine S-Bahn und mit Gegenwahrscheinlichkeit $\mathrm{P}(G) = 0.4$ um einen Güterzug. Der Streckenabschnitt kann zu jedem Zeitpunkt maximal von einem Zug genutzt werden. Güterzüge geben den Streckenabschnitt jeweils nach drei Minuten wieder frei. S-Bahnen halten in dem Abschnitt an einem Haltepunkt, so dass die Belegungszeit Y des Streckenabschnitts je nach Fahrgastaufkommen zwischen drei und fünf Minuten variiert. Die bedingten Verteilungsfunktionen der Belegungszeit lauten

$$F_{Y|S}(y) = \mathrm{P}(Y \leq y \mid S) = \begin{cases} 0 & y < 3, \\ \frac{y-3}{2} & 3 \leq y < 5, \\ 1 & y \geq 5, \end{cases}$$

$$F_{Y|G}(y) = \mathrm{P}(Y \leq y \mid G) = \begin{cases} 0 & y < 3, \\ 1 & y \geq 3. \end{cases}$$

Es treffen im Mittel zehn Züge pro Stunde ein, die den Streckenabschnitt nutzen wollen. Der Ankunftsprozess wird daher als Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda = \frac{1}{6}$ modelliert. Die Warteschlangenkapazität kann als unendlich angenommen werden, da sich die wartenden Züge auf den Zulaufstrecken beliebig weit zurückstauen können. Die Züge fahren in den Streckenabschnitt in der Reihenfolge ein, in der sie eingetroffen sind. Der betrachtete Streckenabschnitt kann daher als $M/G/1/\infty$-FIFO-Bediensystem modelliert werden.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Bedienzeit (Belegungszeit) Y und daraus die Bedienrate. Wie groß ist die Auslastung des Systems? Existiert eine stationäre Verteilung?

b) Berechnen Sie die erwartete Anzahl von Anforderungen im System.

c) Geben Sie die Laplace-Transformierte $L_Y(s)$ der Bedienzeit Y an.
Hinweis: In der Vorlesung wurde die Laplace-Transformierte zwar nur für absolutstetige Zufallsvariablen definiert, die Definition $L_Y(s) = \mathrm{E}(e^{-sY})$ kann aber auf beliebige Zufallsvariablen angewendet werden, deren Träger keine negativen Zahlen enthält.

d) Charakterisieren Sie die Verteilung der Antwortzeit W und der Wartezeit W_Q über ihre jeweilige Laplace-Transformierte.

Aufgabe 2. Die Aufträgen an einem Bediensystem werden mit zwei hintereinander geschalteten Servern bearbeitet, wobei maximal eine der beiden Server beschäftigt sein darf. Daher lasse sich dieses Bediensystem durch ein $M/G/1$-Bediensystem mit hypoexponentialverteilter Bedienzeit Y beschreiben, d.h. $Y \sim \mathrm{HoExp}(\mu_1, \mu_2)$. Es sei $\mu_1 = 2$ und $\mu_2 = 4$, und der Ankunftsprozess sei ein Poisson-Prozess $\mathrm{PP}(\lambda)$ mit Intensität $\lambda = 1$. Die Warteschlangendisziplin sei FIFO.

a) Wie lautet der Erwartungswert $\nu = \mathrm{E}(Y)$ der Bedienzeit Y?

b) Berechnen Sie für den stationären Zustand die mittlere Anzahl von Anforderungen im System $\mathrm{E}(X^*)$ und die mittlere Wartezeit $\mathrm{E}(W_Q^*)$.

c) Wie lauten $\mathrm{E}(X^*)$ und $\mathrm{E}(W_Q^*)$ für das $M/M/1$-System, welches den gleichen Erwartungswert der Bedienzeit wie das obige $M/G/1$-System besitzt?

d) Betrachten Sie nun ein $M/G/1/1$-System mit $Y \sim \mathrm{HoExp}(\mu_1, \mu_2)$ wie oben. Modellieren Sie dieses System als Markoff-Prozess, indem Sie für den Zustandsraum

$$\mathcal{S} = \{(0,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1)\}$$

den Intensitätsgraphen und die Intensitätsmatrix angeben. Berechnen Sie die stationäre Verteilung des zugehörigen Markoff-Prozesses.