

Prof. Dr. Anke Schmeink, Michael Reyer, Christopher Schnelling

Übung 4

Montag, 29. Mai 2017

Aufgabe 1. Gegeben sei ein kooperatives Relaynetzwerk, in dem einzelne Pakete von Station 1 nach Station 4 gesendet werden sollen. Je nachdem wie der Übertragungskanal zum Zeitschritt n beschaffen ist, sendet Station 1 das Paket mit der Wahrscheinlichkeit p_{12} an Station 2, mit Wahrscheinlichkeit p_{13} an Station 3 oder mit Wahrscheinlichkeit p_{14} direkt an Station 4. Die Relaystation 2 leitet das Paket mit p_{23} an Station 3 und mit p_{24} an Station 4 weiter. Die Relaystation 3 leitet das Paket mit p_{34} an Station 4 weiter. Eine einzelne Übertragung dauert einen Zeitschritt. Wenn das Paket sein Ziel erreicht hat, sendet Station 4 eine Bestätigung, welche einen ganzen Zeitschritt dauert, und Station 1 kann im nächsten Zeitschritt mit der Übertragung eines neuen Paketes beginnen. Für die Wahrscheinlichkeiten gilt: $p_{12} = \frac{1}{2}, p_{13} = \frac{1}{3}, p_{14} = \frac{1}{6}, p_{23} = \frac{3}{4}, p_{24} = \frac{1}{4}, p_{34} = 1, p_{41} = 1$.

- Beschreiben Sie dieses System durch eine Markov-Kette $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und geben Sie den Zustandsraum, den Übergangsgraphen und die Übergangsmatrix an.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit braucht ein Paket 1, 2, 3, 4 oder 5 Zeitschritte?
- Wie lange dauert es im Mittel, bis Station 1 ein neues Paket übertragen kann?
- Ist das System irreduzibel und ist es periodisch oder aperiodisch? Geben Sie die Perioden für jeden Zustand an.
- Ist das System rekurrent oder transient? Begründen Sie!
- Wie lautet, falls vorhanden, die stationäre Verteilung p_1^* an Station 1?

Aufgabe 2. Es sei $\mathbf{\Pi}(t)$ die Übergangsmatrix eines homogenen Markov-Prozesses $(X_t)_{t \geq 0}$ mit Zustandsraum \mathcal{S} , d. h. es ist

$$P(X_{s+t} = j \mid X_s = i) = (\mathbf{\Pi}(t))_{ij}$$

für alle $s, t \geq 0, i, j \in \mathcal{S}$.

- Zeigen Sie, dass für $t \geq 0$ die Verteilung $\mathbf{p}(t)$ von X_t als

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{\Pi}(t)$$

aus der Anfangsverteilung $\mathbf{p}(0)$ von X_0 berechnet werden kann.

- Zeigen Sie für $r, t \geq 0$ die *Chapman-Kolmogorov-Gleichung* für Markov-Prozesse

$$\mathbf{\Pi}(r+t) = \mathbf{\Pi}(r) \cdot \mathbf{\Pi}(t).$$