13. Übung zu Systemoptimierung in der Kommunikation

Anke Schmeink, Alexander Engels

06.02.2009

Aufgabe 1. (Barriereverfahren) Betrachten Sie das Problem

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.d.} & 2 \leq x \leq 4 \end{array}$$

mit Zielfunktion $f(x) = x + 1$, Variable $x \in \mathbb{R}$, zulässiger Menge $[2, 4]$ und Optimalstelle $x^* = 2$. Stellen Sie die *logarithmische Barrierefunktion* $\Phi(x)$ auf und berechnen Sie die Optimalstelle $x^*(t)$ des Problems

$$\min \quad t f(x) + \Phi(x)$$

mit Variable $x \in \mathbb{R}$ und Konstante $t > 0$. Geben Sie $x^*(t)$ für $t = 1, 2, 4, 8$ an.

Aufgabe 2. (Um- und Inkugel der zulässigen Menge) Es wird die zulässige Menge

$$M[h, g] = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{1}^T \boldsymbol{x} = n,\ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \right\}$$

eines Optimierungsproblems mit Variable $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ für $n \geq 2$ betrachtet. Weiterhin bezeichnet $B_r(\boldsymbol{x}_c)$ die $(n-1)$-dimensionale euklidische Kugel mit Mittelpunkt $\boldsymbol{x}_c \in \mathbb{R}^n$ und Radius $r \geq 0$ in dem von $M[h, g]$ aufgespannten $(n-1)$-dimensionalen (affinen) Raum. Weisen Sie die folgenden Behauptungen nach.

i) Die kleinste Kugel um $\boldsymbol{x}_c = \mathbf{1}$, die $M[h, g]$ vollständig enthält, besitzt den Radius

$$r = \sqrt{n(n-1)}\ .$$

ii) Die größte Kugel um $\boldsymbol{x}_c = \mathbf{1}$, die vollständig in $M[h, g]$ enthalten ist, besitzt den Radius

$$r = \sqrt{n/(n-1)}\ .$$

Hinweis: Formulieren Sie entsprechende Optimierungsprobleme zur Berechnung des maximalen bzw. minimalen Abstands zulässiger Punkte zum Mittelpunkt und werten Sie die jeweiligen KKT-Bedingungen an den $(n-2)$ -dimensionalen Rändern von $M[h, g]$ aus.