3. Übung zu Systemoptimierung in der Kommunikation

Anke Schmeink, Alexander Engels

07.11.2008

Aufgabe 1. (Polyeder) Welche der folgenden Mengen $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ beschreiben ein *Polyeder*? Falls möglich, stellen Sie die jeweilige Menge in der Form $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}\}$ mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^p$ dar.

i) $\mathcal{S} = \{y_1\boldsymbol{a}_1 + y_2\boldsymbol{a}_2 \mid -1 \leq y_1 \leq 1,\ -1 \leq y_2 \leq 1\}$ mit $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in \mathbb{R}^n$.

ii) $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},\ \sum_{i=1}^n x_i = 1,\ \sum_{i=1}^n x_i a_i = b_1,\ \sum_{i=1}^n x_i a_i^2 = b_2\}$ mit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

iii) $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} \leq 1$ für alle $\boldsymbol{y}$ mit $\parallel \boldsymbol{y} \parallel_2 = 1\}$.

iv) $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} \leq 1$ für alle $\boldsymbol{y}$ mit $\parallel \boldsymbol{y} \parallel_1 = 1\}$.

Aufgabe 2. (Unterstützende Hyperebenen) Stellen Sie die folgenden geschlossenen, konvexen Mengen $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ als Schnittmenge von Halbräumen dar.

i) $\mathcal{C} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2_{>0} \mid x_1x_2 \geq 1\}$.

ii) $\mathcal{C} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \parallel \boldsymbol{x} \parallel_\infty \leq 1\}$, d.h. die $n-$dimensionale *Normkugel* mit Radius $r = 1$ zur *Maximumnorm* $\parallel \cdot \parallel_\infty$ mit $\parallel \boldsymbol{x} \parallel_\infty = \max\{|x_i| \mid 1 \leq i \leq n\}$ für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Hinweis: Wählen Sie Halbräume, die durch die *unterstützenden Hyperebenen* der jeweiligen Menge begrenzt werden.

Aufgabe 3. (Konvexitätserhaltende Operationen) Es seien $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ konvexe Mengen. Zeigen Sie, dass die Menge der Partialsummen

$$\mathcal{C} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m,\ \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \mathbb{R}^n,\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) \in \mathcal{C}_1,\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2) \in \mathcal{C}_2\}$$

konvex ist.

Aufgabe 4. (Minimalstellen konvexer Funktionen) Auf einer konvexen Menge $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ sei eine konvexe Funktion $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert. Weiterhin bezeichne $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$ die Menge der Minimalstellen von f. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{S}$ konvex ist.