7. Übung zu Systemoptimierung in der Kommunikation

Anke Schmeink, Alexander Engels

12.12.2008

Aufgabe 1. (Geometrisches Programm) Formulieren Sie das folgende Problem als *Geometrisches Programm*.

Eine erhitzte Flüssigkeit fließt mit Temperatur $T > 0$ (Grad über Außentemperatur) durch eine Röhre fester Länge und mit kreisförmigem Querschnitt mit Radius $r > 0$. Zur Reduzierung des Wärmeverlustes ist die Röhre ummantelt von einer Isolationsschicht der Stärke $w > 0$, wobei $w \ll r$ gilt.

Der Energieverlust aufgrund der Wärmeabgabe beträgt in einem festen Zeitintervall näherungsweise ${}^{\alpha_1 Tr}/_{w}$ mit Konstante $\alpha_1 > 0$. Die Materialkosten der Röhre umfassen bei fester Wandstärke näherungsweise die Röhrenkosten $\alpha_2 r$ und die Isolationskosten $\alpha_3 rw$ mit Konstanten $\alpha_2,\ \alpha_3 > 0$. Die Gesamtkosten setzen sich zusammen aus den Materialkosten und dem Energieverlust.

Gesucht sind die optimalen Werte für die Variablen $T,\ r$ und w, sodass der Wärmefluss, der bei fester Fließgeschwindigkeit der Flüssigkeit $\alpha_4 Tr^2$ mit Konstante $\alpha_4 > 0$ beträgt, maximal ist unter der Einschränkung, dass die vorgegebene Kostenschranke $C_{max} > 0$ nicht überschritten wird und die Nebenbedingungen

$$T_{min} \leq T \leq T_{max}, \quad r_{min} \leq r \leq r_{max}, \quad w_{min} \leq w \leq w_{max}, \quad w \leq 0,1r$$

bei gegebenen unteren und oberen Werteschranken eingehalten werden.

Aufgabe 2. (GP mit spezieller Posynomform) Erläutern Sie, wie jedes beliebige Geometrische Programm in ein äquivalentes Geometrisches Programm überführt werden kann, bei dem jedes in Zielfunktion und Nebenbedingungen auftretende Posynom aus maximal zwei Monomen besteht.

Aufgabe 3. (Lagrange-Funktion und duale Funktion) Es wird das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & x^2 + 1 \\ \text{s.d.} \quad & (x-2)(x-4) \leq 0 \end{aligned}$$

mit Variable $x \in \mathbb{R}$ betrachtet.

i) Bestimmen Sie grafisch die zulässige Menge $M[g]$, die Optimalstelle x^* und den zugehörigen Optimalwert p^*.

ii) Geben Sie die *Lagrange-Funktion* $L(x, \lambda)$ und die *duale Funktion* $L_D(\lambda)$ an.

iii) Verifizieren Sie, dass die duale Funktion $L_D(\lambda)$ für $\lambda \geq 0$ eine untere Schranke für p^* liefert.