Zusatzübung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Simon Görtzen, Christoph Schmitz, Ehsan Zandi

13.3.2014

Aufgabe 5. Es sei X eine absolut-stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion $f_X(x)$ und differentieller Entropie $\mathrm{H}(X)$.

Hinweis: Verwenden Sie in der gesamten Aufgabe den natürlichen Logarithmus.

a) Gegeben ist die Transformation $Y = e^X$. Zeigen Sie, dass sich die differentielle Entropie $\mathrm{H}(Y)$ schreiben lässt als

$$\mathrm{H}(Y) = \mathrm{H}(X) + \mathrm{E}(X).$$

b) Es gelte nun $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Berechnen Sie die differentielle Entropie $\mathrm{H}(Y)$. Wie heißt die Verteilung von Y?

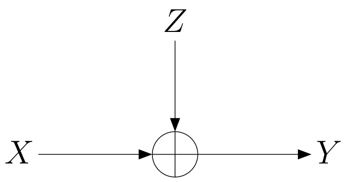
c) Lässt sich die differentielle Entropie mittels Transformation $Z = Y + a$, $a > 0$ erhöhen, so dass gilt $\mathrm{H}(Z) > \mathrm{H}(Y)$ (Begründung erforderlich)?

d) Nennen Sie zwei Eigenschaften, die für die Entropie einer diskreten Zufallsvariablen gelten, aber nicht für die differentielle Entropie.

Aufgabe 6. Die Gesamtaufgabe besteht aus zwei Teilaufgaben, welche **unabhängig** voneinander lösbar sind.

Teil I

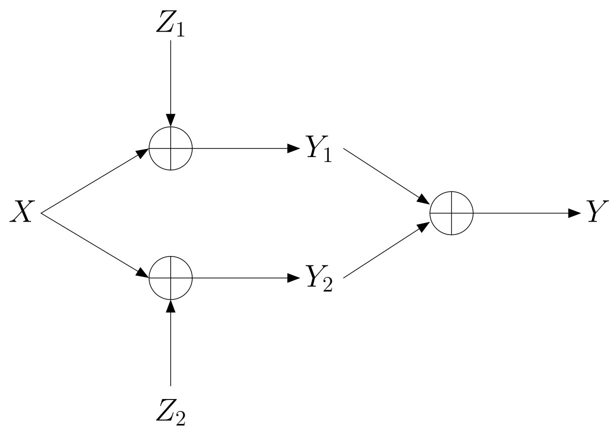
Gegeben ist der folgende Gauß-Kanal:



Das Eingangssignal X sei mittelwertfrei. Der additive Rauschterm ist normalverteilt mit $Z \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ und stochastisch unabhängig von X. Ferner unterliege das Ausgangssignal Y einer Leistungsbeschränkung $\mathrm{E}(Y^2) \leq L$, $L > \sigma^2$. Bestimmen Sie die Kapazität des Kanals.

Teil II

Gegeben sei der folgende Gauß-Kanal, bei welchem das Eingangssignal X über zwei verschiedene Pfade zum Empfänger gelangt. Ferner gilt $\mathrm{E}(X) = 0$ und $\mathrm{E}(X^2) \leq L$.



Die Störterme Z_1 und Z_2 sind gemeinsam normalverteilt mit den Parametern

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Kapazität des obigen Kanals (Zwischenschritte erforderlich).

b) Wie lautet die Kapazität für die Fälle $\rho = 0$ und $\rho = 1$?

c) Im Fall $\rho = -1$ geht die Kapazität gegen unendlich. Erklären Sie das Ergebnis, ohne eine Grenzwertbetrachtung durchzuführen.

Aufgabe 7. Gegeben sei ein komplexer MIMO-Kanal $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{N}$ mit Störung $\boldsymbol{N} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{N}})$, wobei für die Störkovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{N}} = 60 \cdot \boldsymbol{I}_4$ gilt. Die Kanalmatrix $\boldsymbol{H}$ sei

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3+i \\ \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix}.$$

a) Geben Sie die Anzahl der Sende- und Empfangsantennen an.

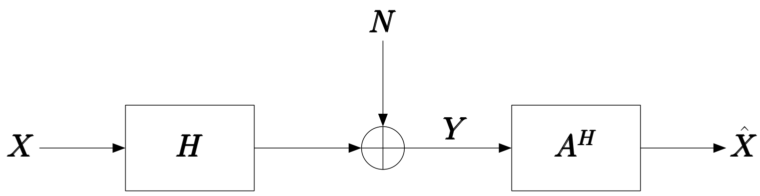
b) Das mittelwertfreie Eingangssignal unterliege einer Leistungsbeschränkung von

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{X}^H \boldsymbol{X}) \leq L = 5.$$

Zeigen Sie, dass diese Leistungsbeschränkung in Abhängigkeit von der Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{X}}$ formuliert werden kann.

c) Berechnen Sie die Kapazität des MIMO-Kanals unter Verwendung des natürlichen Logarithmus.

Auf der Empfängerseite soll nun das Empfangssignal $\boldsymbol{Y}$ gefiltert werden, so dass sich das Eingangssignal $\boldsymbol{X}$ möglichst gut aus $\hat{\boldsymbol{X}}$ rekonstruieren lässt (siehe Grafik).



Aus diesem Grund wurde mittels Optimierung eine optimale Filtermatrix $\boldsymbol{A}$ berechnet, für die gilt

$$\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^H + \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{N}}\right)^{-1} \boldsymbol{H}.$$

d) Zeigen Sie, dass die Matrix $(\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^H + \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{N}})$ tatsächlich invertierbar ist.

Aufgabe 8. Die Gesamtaufgabe besteht aus drei Teilaufgaben, welche **unabhängig** voneinander lösbar sind.

Teil I
Benennen Sie die folgenden Mengen

a) $\mathcal{C}_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$,

b) $\mathcal{C}_2 = \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^T, \boldsymbol{X} > \boldsymbol{0}\}$,

c) $\mathcal{C}_3 = \{(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \boldsymbol{x} \in \mathrm{dom} f, f(\boldsymbol{x}) \leq t\}$.

Teil II
Geben Sie den optimalen Wert p^* und die Lösungsmenge (x_1^*, x_2^*) des folgenden Optimierungsproblems an:

$$\begin{array}{rl} \underset{x_1, x_2}{\text{maximize}} & x_1 \\ \text{subject to} & x_1^2 + x_2^2 \geq 1,\ x_1 \leq 0,\ |x_2| \leq 1 \end{array}$$

Teil III
Zeigen oder widerlegen Sie, ob es sich bei folgenden Optimierungsproblemen um konvexe Probleme handelt. Für die gesamte Aufgabe gilt der Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ als Variable. Sämtliche andere Größen sind reell und haben eine dem Problem entsprechende korrekte Dimension.

Hinweis: $f(\boldsymbol{x})$ ist konvex $\quad\Leftrightarrow\quad$ dom f ist konvex und $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) \geq 0$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathrm{dom} f$.

a) Problem 1

$$\begin{array}{rl} \underset{\boldsymbol{x}}{\text{minimize}} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \log \frac{x_i}{y_i} \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \\ & x_i = 2^{-l_i},\ l_i \in \mathbb{N}_0,\ i = 1, \ldots, n \end{array}$$

b) Problem 2

$$\begin{array}{rl} \underset{\boldsymbol{x}}{\text{minimize}} & \|\boldsymbol{x}\|_1 \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{array}$$

c) Problem 3

$$\begin{array}{rl} \underset{\boldsymbol{x}}{\text{minimize}} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \gamma \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^T > \boldsymbol{0},\ \gamma > 0 \end{array}$$

d) Problem 4

$$\begin{array}{rl} \underset{\boldsymbol{x}}{\text{minimize}} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\log(a_i + b_i + x_i) - \log(a_i + x_i)) \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \leq P, \\ & a_i, b_i, x_i > 0,\ i = 1, \ldots, n \end{array}$$