# Zusatzübung zur Theoretischen Informationstechnik

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Chunhui Liu, Daniel Bielefeld

18.08.2009, 15:00 Uhr, WSH 24 A 407

**Aufgabe 1.** An einer Radarstation zur Detektion von Flugobjekten sind die empfangenen Signale von Rauschen überlagert. Dabei sind insgesamt 20% der eintreffenden Signale verrauschte Radarsignale, die mit der Anwesenheit eines Flugobjekts verbunden sind, und 80% der eintreffenden Signale bestehen nur aus Rauschen. Den Gütecharakteristiken der Radarstation ist zu entnehmen, dass bei Vorliegen eines verrauschten Radarsignals die Anlage mit Wahrscheinlichkeit $p_d = 0.8$ die Anwesenheit des Flugobjekts korrekt meldet. Bei Vorliegen von reinem Rauschen zeigt die Anlage die Anwesenheit eines Flugobjekts mit Wahrscheinlichkeit $p_f = 0.2$ an, in diesem Fall wird also ein falscher Alarm ausgelöst.

a) Die Radarstation zeige nun die Anwesenheit eines Flugobjekts an. Bestimmen Sie unter Verwendung der relevanten Ereignisse die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wirklich ein Flugobjekt anwesend ist.

b) Berechnen Sie die Gesamtfehlerwahrscheinlichkeit der Radaranlage, d.h., die Wahrscheinlichkeit, dass die Anlage eine falsche Anzeige macht.

**Aufgabe 2.** Die Verteilung eines zweidimensional normalverteilten Zufallsvektors $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)'$ besitze folgende Dichte:

$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{8}\pi} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{4} + x_1 + x_2 - \frac{3}{2}\right)$$

a) Bestimmen Sie den Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}$ sowie die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{C}$ des Zufallsvektors $\boldsymbol{X}$.

b) Geben Sie die Dichten $f_{X_1}(x_1)$ und $f_{X_2}(x_2)$ an.

c) Sind $X_1$ und $X_2$ stochastisch unabhängig (Begründung)?

**Aufgabe 3.** Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 2(\frac{1}{10} - \alpha|x|), & -5 \le x \le 5 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

a) Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $f$ die Dichte einer absolut-stetigen Zufallsvariablen $X$? Skizzieren Sie die entsprechende Dichte $f$.

b) Bestimmen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion $F_X$ von $X$.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert von $X$.

d) Berechnen Sie die Varianz von $X$.

e) Bestimmen Sie die Verteilungsdichte $f_Y$ der Zufallsvariablen $Y = 2X + 5$.

f) Berechnen Sie den Erwartungswert von $Y$.

g) Berechnen Sie die Varianz von $Y$.

**Aufgabe 4.** Eine gedächtnislose Nachrichtenquelle $X$ mit dem Quellalphabet $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ sende die Symbole mit folgenden Wahrscheinlichkeiten:

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $p(x_k)$ | 0.5 | 0.3 | 0.1 | 0.1 |

a) Berechnen Sie die Entropie der Quelle bzgl. $\log_2$.

b) Berechnen Sie die Entropie der Quelle für Symbolpaare (Blöcke aus 2 Symbolen) bzgl. $\log_2$.

c) Konstruieren Sie einen binären Huffman-Code für die Einzelsymbole und berechnen Sie seine mittlere Codewortlänge.

d) Konstruieren Sie einen binären Huffman-Code für Symbolpaare und berechnen Sie seine mittlere Codewortlänge und die mittlere Codewortlänge je Symbol.

e) Lohnt es sich im vorliegenden Fall (bzgl. der mittleren Codewortlänge), einen Huffman-Code für Symbolpaare zu verwenden?

**Aufgabe 5.** Es seien die Zufallsvariablen $X$ und $Y$ gemeinsam zweidimensional normalverteilt mit $E(X) = E(Y) = 0$, $E(X^2) = \sigma_1^2$, $E(Y^2) = \sigma_2^2$ und $E(XY) = \sigma_1\sigma_2\rho$ mit $0 \le \rho < 1$. Stellen Sie die Transinformation $I(X, Y)$ als Funktion von $\rho$ dar. Für welche Werte von $\rho$ sind $X$ und $Y$ stochastisch unabhängig?

**Aufgabe 6.** Gegeben sei folgender Kanal:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & Z_1 & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & \bigoplus \longrightarrow Y_1 & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
X & & & & \bigoplus \longrightarrow Y \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & \bigoplus \longrightarrow Y_2 & & \\
 & & \uparrow & & \\
 & & Z_2 & &
\end{array}
$$

Das Eingangssignal $X$ unterliege der Leistungsbeschränkung $E[X^2] \leq 4$ und habe den Erwartungswert $E(X) = 0$.

a) Berechnen Sie die Kapazität $C$ des Kanals (bzgl. ln) für den Fall

$$(Z_1, Z_2)' \sim \mathrm{N}_2(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 8 & 8\rho \\ 8\rho & 8 \end{pmatrix}, \quad \rho \in (-1, 1).$$

b) Wie lautet die Kapazität (bzgl. ln) für $\rho = 0$, $\rho \to 1$, $\rho \to -1$?

c) Was für eine Forderung muss man an $\rho$ stellen, damit für die Kapazität $C$ des Kanals (bzgl. ln) gilt $C \geq \frac{1}{2}$?

**Aufgabe 7.** Gegeben sei ein MIMO-Kanal mit vier Empfangsantennen und drei Sendeantennen. Die Leistungsbeschränkung betrage $L = 38$. Für die additive Störung gelte $\boldsymbol{Z} \sim \mathrm{SCN}(\mathbf{0}, 220 \cdot \boldsymbol{I}_4)$. Die Kanalmatrix $\boldsymbol{H}$ sei

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 2+i & 0 & 2+i \\ 1 & 0 & -1+i \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \\ -1+i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Kapazität des Kanals (bzgl. ln).

b) Geben Sie die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{Q}$ an, so dass für die Eingabe $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{SCN}(\mathbf{0}, \boldsymbol{Q})$ die Kapazität des Kanals angenommen wird.

**Aufgabe 8.** Ein Mobilfunknetzbetreiber plant das an einer Basisstation vorhandene Frequenzband auf zwei Dienste aufzuteilen. Für den ersten Dienst, einen Voicecall, werden pro Nutzer ein Nutzkanal sowie zwei Signalisierungskanäle benötigt. Marktuntersuchungen haben ergeben, dass pro Nutzer 30 Euro Gewinn erzielt werden können und dass 30 Nutzer den Dienst Voicecall an dieser Basisstation nutzen würden. Der zweite Dienst ist eine mobile Fernsehübertragung, die sowohl einen Nutz- und einen Signalisierungskanal benötigt. Die Marktforschung ergab hier einen Gewinn von 10 Euro pro Nutzer und dass 50 Nutzer die mobile Fernsehübertragung nutzen würden.
An der Basisstation stehen insgesamt 60 Nutz- und 85 Signalisierungskanäle zur Verfügung, die jeweils einem Dienst zugeordnet werden können. Die Nutzer sollen unter den genannten Bedingungen so für die beiden Dienste eingeplant werden, dass der Gewinn des Betreibers maximiert wird.

a) Formulieren Sie das zugehörige Optimierungsproblem als lineares Programm in kanonischer Form.

b) Lösen Sie das Optimierungsproblem graphisch.

c) Wie hoch ist der maximale Gewinn des Mobilfunknetzbetreibers?