Zusatzübung zur Theoretischen Informationstechnik

Prof. Dr. Anke Schmeink, Martijn Arts, Andreas Bollig, Christoph Schmitz

30.07.2012

TI I: Aufgabe 1-4
TI II: Aufgabe 5-8

Aufgabe 1. Eine Firma schaltet auf einer Website einen Werbebanner. Die Besucher dieser Website benutzen drei verschiedene Internetbrowser A, B und C. Dabei benutzen 20% der Besucher Browser A, 50% Browser B und 30% Browser C. Die Firma sammelt Statistiken über die sogenannte Click-Through-Rate (CTR), d.h. die Anzahl der Klicks auf den Werbebanner im Verhältnis zur Anzahl der Seitenaufrufe, basierend auf den benutzten Browsern. Dabei stellt sich heraus, dass die Benutzer von Browser A zu 70% auf den Werbebanner klicken, wenn sie die Website besuchen, während nur 60% der Besucher die Browser B benutzen auf den Werbebanner klicken. Die Benutzer des Browsers C sind besonders werbescheu und verlassen zu 80% die Webseite ohne den Werbebanner geklickt zu haben. Zur Unterstützung der Marktanalyse sollen folgende Fragen beantwortet werden.

a) Wieviel Prozent der Besucher der Website klicken auf den Werbebanner?

b) Wieviel Prozent der Besucher, die auf den Werbebanner klicken, benutzen Browser B?

c) Wieviel Prozent der Besucher, die nicht auf den Werbebanner klicken, benutzen Browser A?

d) Wie hoch ist der Anteil der Nutzer des Browsers C, unter den Websitebesuchern die nicht auf den Werbebanner klicken?

Aufgabe 2. Gegeben sei eine Quelle X, die ein Signal mit folgender asymmetrischer Wahrscheinlichkeitsdichte generiert:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2b} & \text{, für } -b \leq x < 1 \\ \frac{b-1}{2x} & \text{, für } 1 \leq x \leq e \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie b so, dass $f_X(x)$ die Voraussetzungen an eine Wahrscheinlichkeitsdichte erfüllt.

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X)$.

d) Bestimmen Sie die Varianz $V(X)$.

e) Bestimmen Sie die Verteilungsdichte $f_T(t)$ der Zufallsvariablen $T = \frac{1}{2}X$.

Bei einer Übertragung werde dem gedämpften Signal additives und von dem Signal stochastisch unabhängiges Rauschen Z gemäß $Y = \frac{1}{2}X + Z$ hinzugefügt. Die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_Z(z)$ des Rauschterms Z sei

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 & \text{, für } 0 \le z \le 1 \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

f) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_Y(y)$ von Y.

Aufgabe 3. An den zwei Antennen einer Basisstation werde ein reelles Signal in Form eines zweidimensional normalverteilten Zufallsvektors $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ empfangen. Die erwartete Empfangsleistung an den beiden Antennen sei jeweils gegeben durch $E(X_1^2) = 14$ und $E(X_2^2) = 8$. Ferner sei $E(X_1) = 3E(X_2) > 0$ und $E(X_1 \cdot X_2) = 8$. Die Entropie des Signals sei

$$H(\mathbf{X}) = \frac{\ln(10)}{2} + \ln(2\pi e).$$

Berechnen Sie den Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}$ und die Kovarianzmatrix $\mathbf{C}$ von $\mathbf{X}$.

Aufgabe 4. Gegeben seien zwei unabhängige diskrete gedächtnislose Quellen X und Y mit den Quellalphabeten $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{A, B, C\}$. Die Symbolwahrscheinlichkeiten für die Quelle X seien

$$P(X = A) = 0.7,\ P(X = B) = 0.2,\ P(X = C) = 0.1$$

und die Symbolwahrscheinlichkeiten für die Quelle Y seien

$$P(Y = A) = 0.55,\ P(Y = B) = t,\ P(Y = C) = 0.45 - t.$$

Verwenden Sie in der gesamten Aufgabe zur Berechnung der Entropie den Logarithmus zur Basis 2.

a) Sei $0 \le t \le 0.45$. Bestimmen Sie t so, dass die Kullback-Leiber-Distanz zwischen den Quellen X und Y, d.h. $\mathrm{D}(X||Y)$, minimal wird.

Hinweis: Falls Aufgabenteil a) nicht bearbeitet wurde, nehmen Sie im Folgenden $t = 0.25$ an.

b) Berechnen Sie die Entropie der Quelle X, d.h. $H(X)$, und Y, d.h. $H(Y)$, gegeben t aus Aufgabenteil a).

c) Konstruieren Sie jeweils einen binären Huffman-Kode für Einzelsymbole der Quellen X und Y und berechnen Sie deren mittleren Kodewortlängen.

d) Bestimmen Sie die Entropie für Symbolpaare (Blöcke aus 2 Symbolen, wobei das erste Symbol aus der Quelle X und das zweite Symbol aus der Quelle Y stammt).

e) Konstruieren Sie einen binären Huffman-Kode für die Symbolpaare aus Aufgabenteil d) und berechnen Sie seine mittlere Kodewortlänge je Symbol.

Aufgabe 5. Die Gesamtaufgabe besteht aus zwei Teilen, die unabhängig voneinander lösbar sind. Verwenden Sie in der gesamten Aufgabe den natürlichen Logarithmus.

Teil I

a) Es sei X eine absolut-stetige Zufallsvariable mit der unten angegebenen Verteilungsdichte $f_X(x)$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $a > 0$. Skizzieren Sie die Verteilungsdichte $f_X(x)$ unter Angabe charakteristischer Werte und berechnen Sie die differentielle Entropie $\mathrm{H}(X)$.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{4x}{a^2} & \text{, für } 0 \leq x < \frac{a}{2} \\ \frac{4}{a^2}(a-x) & \text{, für } \frac{a}{2} \leq x \leq a \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Hinweis: Es gelte: $0 \cdot \log(0) = 0$.

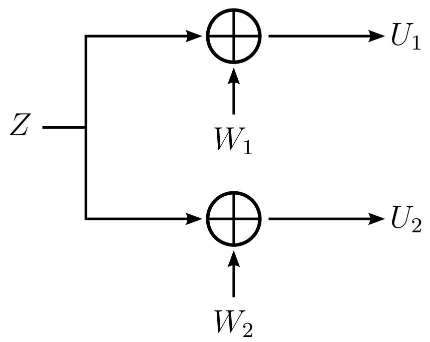
b) Die Zufallsvariable X setze sich aus zwei stochastisch unabhängig identisch verteilten (i.i.d.) Zufallsvariablen Y_1 und Y_2 additiv zusammen, sodass gilt: $X = Y_1 + Y_2$. Geben Sie die Verteilungsdichten von Y_1 und Y_2 an.

c) Zeigen oder widerlegen Sie die allgemeine Gültigkeit folgender Aussage:

$$\mathrm{H}(Y_1 + Y_2) = \mathrm{H}(Y_1) + \mathrm{H}(Y_2) \quad .$$

Teil II

d) Betrachten Sie nun den unten abgebildeten Kanal. Das Eingangssignal Z sei von den additiven Rauschsignalen W_1 und W_2 stochastisch unabhängig. W_1 und W_2 seien i.i.d. und der Kanalausgang werde zu einem Vektor $\mathbf{U} = (U_1, U_2)'$ zusammengefasst.



Zeigen Sie, dass folgende Aussage gilt:

$$\mathrm{I}(Z; \mathbf{U}) \leq 2\, \mathrm{I}(Z; U_1) \quad .$$

Aufgabe 6. Betrachten Sie den parallelen Gaußkanal

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Z}$$

mit Eingabe $\boldsymbol{X}$ und Rauschterm $\boldsymbol{Z}$. Dabei seien $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{Z}$ stochastisch unabhängig und es sei $\boldsymbol{Z} \sim \mathrm{N}\left(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{Z}}\right)$ mit

$$\mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{Z}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Für die Eingabe gelte eine Leistungsbeschränkung von $L = 4$.

a) Berechnen Sie die Kapazität des Kanals.

b) Bestimmen Sie diejenige Verteilung von $\boldsymbol{X}$, für die die Kanalkapazität angenommen wird.

Aufgabe 7. Gegeben sei der MIMO-Kanal $\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{Z}$ mit Leistungsbeschränkung $L = 32$ und additiver Störung $\mathbf{Z} \sim \mathrm{SCN}(\mathbf{0}, 198 \cdot \mathbf{I}_4)$. Die Kanalmatrix $\mathbf{H}$ sei gegeben durch

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2+i & 0 & 2+i \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2}+i \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{2}+i & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Verwenden Sie für die Aufgabenteile a) - d) den natürlichen Logarithmus.

a) Geben Sie die Anzahl der Sende- und Empfangsantennen an.

b) Berechnen Sie die Kapazität des MIMO-Kanals.

c) Geben Sie eine Kovarianzmatrix $\mathbf{Q}$ an, so dass für die Eingabe $\mathbf{X} \sim \mathrm{SCN}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$ die Kapazität des Kanals angenommen wird.

d) Zum Empfang stehe nun nur die dritte Empfangsantenne zur Verfügung. Wie hoch muss die Leistung L sein, um die gleiche Kapazität wie in Aufgabenteil b) zu erzielen?

   Hinweis: Rechnen Sie mit einer Kapazität von $C = 1.5$, falls Aufgabenteil b) nicht bearbeitet wurde.

e) Wie viel stärker ist die in Aufgabenteil d) bestimmte Sendeleistung im Vergleich zum MIMO-Fall in dB?

Aufgabe 8. Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}. \end{array}$$

Dabei sei $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit $x_1, x_2 \in [0, \infty)$. Außerdem sind $\mathbf{A}$ und $\mathbf{b}$ gegeben durch

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Skizzieren Sie die Menge zulässiger Lösungen unter Angabe charakteristischer Werte.

b) Geben Sie für folgende Zielfunktionen jeweils den optimalen Wert und die zugehörige Menge optimaler Lösungen an:

i) $f_0(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$

ii) $f_0(\mathbf{x}) = -x_2$

iii) $f_0(\mathbf{x}) = -\|\mathbf{x}\|_\infty$

Hinweis: Die Maximumsnorm des Vektors $\mathbf{x}$ ist definiert als

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|.$$