Zusatzübung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Fabian Altenbach, Michael Reyer

22.3.2010

Aufgabe 1. Gegeben sei eine Quelle X, die ein Signal mit folgender asymmetrischer Wahrscheinlichkeitsdichte generiert.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x + b, & -2 \leq x < 0 \\ -\frac{1}{24}x + b, & 0 \leq x \leq 6 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie b so, dass $f_X(x)$ die Vorraussetzungen an eine Wahrscheinlichkeitsdichte erfüllt.

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$.

d) Bestimmen Sie die Varianz $\mathrm{V}(X)$.

Das Signal der Quelle werde nun so geändert, dass es die folgende symmetrische Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x)$ besitzt.

$$f_X(x) = \begin{cases} -\frac{1}{16}|x| + \frac{1}{4}, & -4 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bei einer Übertragung werde dem Signal additives und von dem Signal stochastisch unabhängiges Rauschen Z gemäß $Y = X + Z$ hinzugefügt. Die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_Z(z)$ des Rauschterms Z sei

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \leq z \leq 4 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_Y(y)$ von Y.

Aufgabe 2. Gegeben sei eine diskrete gedächtnislose Quelle X mit dem Quellalphabet $\mathcal{X} = \{D, E, S, B\}$.

a) Bestimmen Sie die Entropie der Quelle für den Fall, dass alle Quellsymbole mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten bzgl. $\log_2$.

b) Konstruieren Sie einen binären Huffman-Kode für Einzelsymbole für den Fall gleichverteilter Quellsymbole und bestimmen Sie seine mittlere Kodewortlänge.

Die Symbolwahrscheinlichkeiten der weiterhin gedächtnislosen Quelle X seien im folgenden $P(X = D) = 0.4$, $P(X = E) = 0.3$, $P(X = S) = 0.2$, $P(X = B) = 0.1$.

c) Berechnen Sie die Entropie der Quelle bzgl. $\log_2$.

d) Konstruieren Sie einen binären Huffman-Kode für Einzelsymbole und berechnen Sie seine mittlere Kodewortlänge.

e) Kodieren Sie mit dem Huffman-Kode aus **d)** die Nachricht „SSDE“.

f) Durch einen Fehler werde das 6. Bit der kodierten Nachricht aus **e)** verfälscht. Welche Nachricht wird in diesem Fall dekodiert?

Aufgabe 3. Die Impulsantwort $h(t)$ eines zeitkontiniuerlichen LTI-Systems sei gegeben durch

$$h(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < 1 \\ 2, & 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & 2 < t < \infty \end{cases} .$$

Am Eingang des LTI-Systems liege weißes Rauschen $\{W(t)\}$ mit der Autokorrelationsfunktion $R_{WW}(t) = \delta(t)/2$ vor. Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum des gefilterten Prozesses $\{N(t)\}$ und vereinfachen Sie dabei so weit wie möglich.

Hinweis:

$$1 - \cos(2\alpha) = 2\sin^2(\alpha)$$

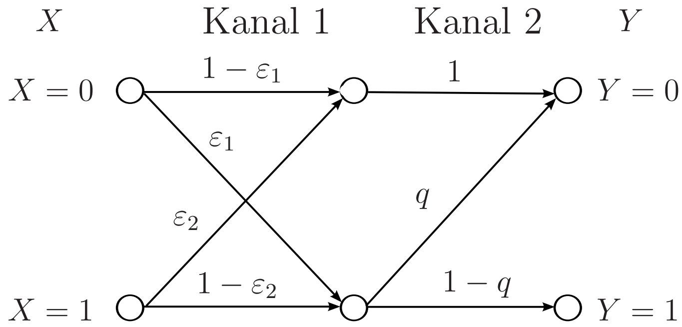
Aufgabe 4. Gegeben seien zwei diskrete Verteilungen $\mathbf{p} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$ und $\mathbf{q} = \left(\frac{1}{3}, t, \frac{2}{3} - t\right)$ mit $0 \leq t \leq \frac{2}{3}$.

a) Sei $t = \frac{1}{2}$. Berechnen Sie die Kullback-Leibler-Distanz $D(\mathbf{p} \parallel \mathbf{q})$ bzgl. $\log_2$.

b) Bestimmen Sie t so, dass $D(\mathbf{p} \parallel \mathbf{q})$ minimal wird.

c) Für welche diskrete Verteilung $\mathbf{r}$ ist $D(\mathbf{r} \parallel \mathbf{p})$ minimal und für welche maximal? (ohne Beweis)

Aufgabe 5. Gegeben ist die Reihenschaltung zweier diskreter, gedächtnisloser Kanäle:



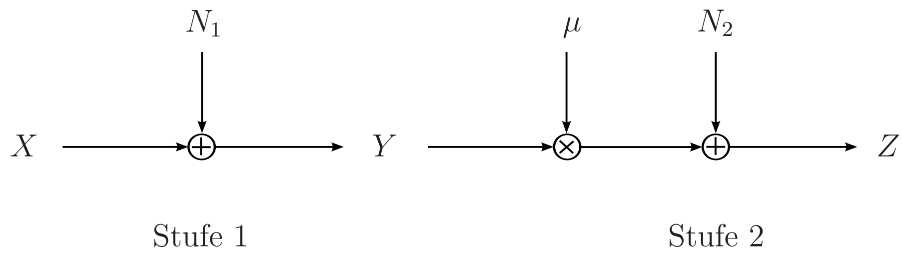
Die Parameter $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ und q liegen jeweils im Intervall $[0, 0.5]$ und es gelte ferner $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$.

a) Bestimmen Sie q so, dass der Gesamtkanal symmetrisch ist.

b) Bestimmen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten des binären symmetrischen Kanals, der zum Gesamtkanal aus **a)** äquivalent ist, in Abhängigkeit von ε_1 und ε_2.

c) Sei nun $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ und $q \in [0, 0, 5]$. Mit der Wahrscheinlichkeit p_0 liege am Kanaleingang eine 0 an und mit der Wahrscheinlichkeit $p_1 = 1 - p_0$ liege eine 1 an. Bestimmen Sie p_0 und p_1 in Abhängigkeit von q so, dass die Entropie am Kanalausgang maximal wird.

Aufgabe 6. Gegeben sei der folgende zweistufige Kanal:



Das Eingangssignal X der ersten Stufe unterliege der Leistungsbeschränkung $E(X^2) \leq L$ und habe den Erwartungswert $E(X) = 0$. Die additiven Rauschterme N_1 und N_2 seien normalverteilt mit $N_1 \sim \mathrm{N}(0, \sigma_1^2)$ und $N_2 \sim \mathrm{N}(0, \sigma_2^2)$. Das Eingangssignal der zweiten Stufe ist das Ausgangssignal der ersten Stufe multipliziert mit dem Verstärkungsfaktor $\mu > 0$. Das Ausgangssignal der zweiten Stufe ist Z. Das Eingangssignal X und die beiden Rauschterme N_1 und N_2 seien gemeinsam stochastisch unabhängig.

a) Geben Sie die Kapazität $C_{X,Y}$ der ersten Stufe in Abhängigkeit von σ_1 und L an.

b) Sei $\mu = 1$. Berechnen Sie die maximale Transinformation $I_{\max}(Y, Z)$ zwischen Y und Z in Abhängigkeit von σ_1, σ_2 und L.

c) Sei μ wieder beliebig aber größer als Null. Berechnen Sie die Kapazität $C_{X,Z}$ des gesamten Kanals, also die maximale Transinformation zwischen X und Z in Abhängigkeit von σ_1, σ_2, L und μ.

Aufgabe 7. Gegeben sei ein MIMO-Kanal mit vier Empfangsantennen und drei Sendeantennen. Die Leistungsbeschränkung betrage $L = 32$. Für die additive Störung gelte $\mathbf{Z} \sim \mathrm{SCN}(\mathbf{0}, 110 \cdot \mathbf{I}_4)$. Die Kanalmatrix $\mathbf{H}$ sei

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2+i & 0 & 2+i \\ 1 & 0 & -1+i \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \\ -1+i & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hinweis: Verwenden Sie für die gesamte Aufgabe den natürlichen Logarithmus.

a) Berechnen Sie die Kapazität des Kanals.

b) Berechnen Sie die Kovarianzmatrix $\mathbf{Q}$ der Eingabe $\mathbf{X} \sim \mathrm{SCN}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$, für welche die Kapazität des Kanals erreicht wird.

Aufgabe 8. Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x_1, x_2) \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & 2x_1 + x_2 \geq \frac{3}{2} \\ & x_1 \in [0, 3]\,,\; x_2 \in [0, \infty)\,. \end{array}$$

Zeichnen Sie die zulässige Menge. Geben Sie danach den optimalen Wert und die optimale Menge für folgende Zielfunktionen an:

a) $f_0(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

b) $f_0(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$