Zusatzübung zur Theoretischen Informationstechnik

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Meik Dörpinghaus, Daniel Bielefeld

21.03.2011

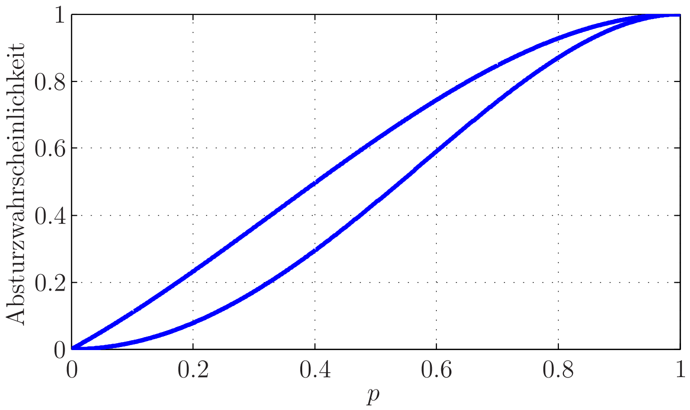
Aufgabe 1.

a) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{A}$. Geben Sie eine Bedingung für A und B an, sodass gilt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$

b) Ein dreimotoriges Flugzeug stürzt ab, wenn der Hauptmotor ausfällt oder beide Seitenmotoren ausfallen. Ein viermotoriges Flugzeug stürzt ab, wenn auf einer Seite beide Motoren ausfallen. Die Ausfallwahrscheinlichkeit jedes einzelnen Motors auf einem bestimmten Flug sei dabei p. Das Eintreten eines Motorenausfalls beeinflusst nicht die Zuverlässigkeit der anderen Motoren. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein dreimotoriges bzw. viermotoriges Flugzeug wegen Motorenversagens abstürzt.

c) Betrachten Sie die beiden folgenden Kurven zur Absturzwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit der Ausfallwahrscheinlichkeit p eines Motors. Welche Flugzeugklasse gehört zu welcher Kurve (Begründung erforderlich)?



d) Die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall eines Motors sei nun $p = 10^{-5}$. Eine Fluggesellschaft verfügt über 30% dreimotorige und 70% viermotorige Flugzeuge. Ein Flugzeug dieser Gesellschaft stürzt ab. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich dabei um ein viermotoriges Flugzeug gehandelt hat?

Aufgabe 2.

a) Man betrachte einen SISO-Kanal ohne Rauschen, also

$$Y = hX,$$

mit $h > 0$ und $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Bestimmen Sie die Dichte $f_Y(y)$.

b) Man betrachte nun einen SISO-Kanal mit Rauschen, also

$$Z = hX + N,$$

mit $h = 1/2$, $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ und $N \sim \mathrm{Exp}(\mu)$, $\lambda, \mu > 0$. Die Eingabe X und das Rauschen N seien stochastisch unabhängig.

- Bestimmen Sie $f_Z(z)$.
- Unter welcher Bedingung hat die Dichte die folgende Form?

$$f_Z(z) = a^2\, z\, e^{-a\,z} \mathbf{I}_{[0,\infty)}(z)$$

c) Man betrachte nun ein 2×2-MIMO-Kanal ohne Rauschen, also

$$\mathbf{Y} = \mathbf{HX},$$

mit

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}, \ \text{und } \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Die Dichten der stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen X_1 und X_2 sind gegeben durch

$$f_{X_1}(x_1) = 2\, e^{-2\,x_1} \mathbf{I}_{[0,\infty)}(x_1),$$
$$f_{X_2}(x_2) = x_2\, e^{-x_2} \mathbf{I}_{[0,\infty)}(x_2).$$

Wie lautet die gemeinsame Dichte $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$?

Aufgabe 3. Gegeben sei eine diskrete, gedächtnislose Quelle X mit dem Quellalphabet $\mathcal{X} = \{A, B, C, D\}$. Die Symbolwahrscheinlichkeiten seien $P(X = A) = 0.4$, $P(X = B) = 0.3$, $P(X = C) = 0.2$ und $P(X = D) = 0.1$.

a) Bestimmen Sie die Entropie der Quelle bzgl. $\log_2$.

b) Konstruieren Sie einen binären Huffman-Kode und bestimmen Sie seine mittlere Kodewortlänge.

c) Prüfen Sie, ob bei Kodierung von Symbolpaaren (Blöcke aus zwei Symbolen), die mittlere Kodewortlänge pro Symbol um 5% gegenüber dem Huffmann-Kode aus **b)** verbessert werden kann. Falls dies möglich ist, konstruieren Sie den zugehörigen binären Huffman-Kode.

Hinweis: Falls Sie **b)** nicht gelöst haben, nutzen Sie 1.91 als mittlere Kodewortlänge.

d) Kodieren Sie mit dem Huffman-Kode aus **b)** die Nachricht „CD“.

e) Durch einen Fehler werde das 3. Bit der kodierten Nachricht aus **d)** verfälscht. Welche Nachricht wird in diesem Fall dekodiert?

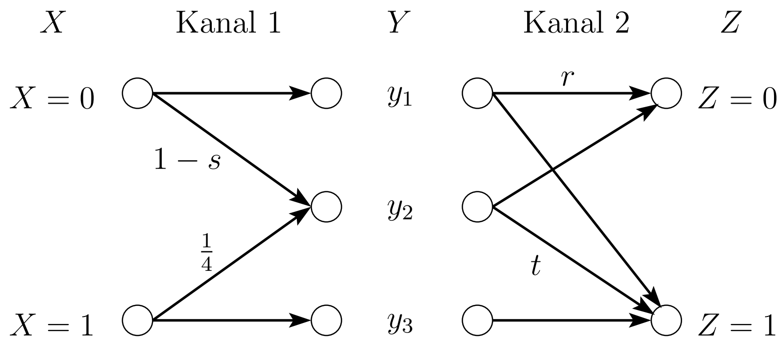
Die Symbole werden nun mit den Eingabewörtern $\mathcal{C} = \{(0,0,0),(0,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$ identifiziert und über einen gedächtnislosen binären symmetrischen Kanal mit Fehlerwahrscheinlichkeit $\epsilon = 1/4$ geschickt.

f) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_K für die fehlerfreie Übertragung eines Eingabeworts?

g) Geben Sie eine ML-Dekodierung $h_{ML} : \{0,1\}^3 \to \mathcal{C}$ an.

h) Nehmen Sie an, dass die Ausgaben $\mathcal{D} = \{(0,0,0),(0,0,1)\}$ zu $(0,0,0)$ dekodiert werden. Die Wahrscheinlichkeit, fälschlicherweise $(0,0,0)$ zu dekodieren, soll minimiert werden. Geben Sie hierzu eine eindeutige Zuordnung zwischen dem Quellalphabet $\mathcal{X}$ und den Eingabewörtern $\mathcal{C}$ an, wobei das Symbol C fest dem Eingabewort $(1,0,1)$ zugeordnet wird. Wie hoch ist die zugehörige Wahrscheinlichkeit?

Aufgabe 4. Gegeben sei die Reihenschaltung zweier diskreter, gedächtnisloser Kanäle mit der Eingabeverteilung $P(X = 0) = p_0 > 0$ und $P(X = 1) = 1 - p_0$. Es gelte weiterhin $0 < r, s, t \leq 1$.



Hinweis: Verwenden Sie für die gesamte Aufgabe den Logarithmus zur Basis 2.

a) Ergänzen Sie die fehlenden Übertragungswahrscheinlichkeiten.

b) Berechnen Sie die Übertragungswahrscheinlichkeiten $P(Z = j \mid X = i)$ für $i, j = 0, 1$ und zeichnen Sie einen äquivalenten einstufigen Ersatzkanal. Für welche Parameter (r, s, t) ist eine fehlerfreie Detektion der Eingabesymbole X bei Kenntnis von Z möglich?

c) Bestimmen Sie alle Parametertripel (r, s, t), $0 < r, s, t \leq 1$, sodass sich ein binärer symmetrischer Kanal (BSC) mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit von $1/8$ ergibt.

d) Berechnen Sie für den äquivalenten BSC-Kanal aus **c)** die Transinformation $I(X, Z)$ für die Eingabeverteilung $(p_0, 1 - p_0) = (1/4, 3/4)$.

e) Geben Sie die kapazitätserreichende Eingabeverteilung $(p_0^*, 1 - p_0^*)$ des äquivalenten Kanals an. Berechnen Sie anschließend die zugehörige Kanalkapazität.

Aufgabe 5. Die Gesamtaufgabe besteht aus zwei Teilaufgaben, welche **unabhängig** voneinander lösbar sind.

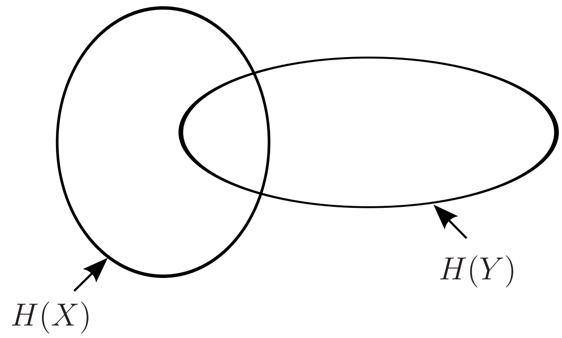
Teil I

a) Es sei $X \sim \mathrm{R}(a, b)$ eine gleichverteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie die differentielle Entropie von X.

b) Zeigen oder widerlegen Sie die Aussage „Die differentielle Entropie ist nichtnegativ".

Teil II

c) Betrachten Sie die folgende Abbildung zur anschaulichen Darstellung der Entropie der Zufallsvariablen X und Y. Skizzieren Sie in dieser Abbildung in unterscheidbarer Art und Weise die bedingte Entropie $H(X|Y)$ und die Transinformation $I(X, Y)$.



d) Zeigen Sie rechnerisch die Gültigkeit der Beziehung für die Transinformation $I(X, Y)$

$$H(X) - H(X|Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)\,.$$

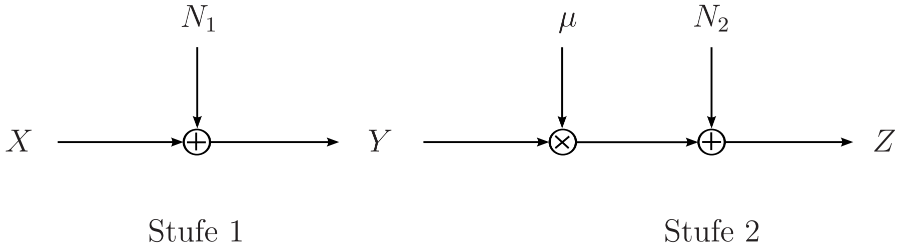
Es sei nun $(X, Y) \sim \mathrm{N}_2(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ zweidimensional normalverteilt mit der Kovarianzmatrix

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}, \quad -1 < \rho < 1\,.$$

e) Berechnen Sie die Transinformation $I(X, Y)$ und die bedingten Entropien $H(X|Y)$ und $H(Y|X)$.

f) Es gilt jetzt $\rho = 0$. Wie lautet nun die Transinformation $I(X, Y)$? Welche Konsequenz hat dies für die Zufallsvariablen X und Y?

Aufgabe 6. Gegeben sei der folgende zweistufige Kanal:



Das Eingangssignal X der ersten Stufe unterliege der Leistungsbeschränkung $E(X^2) \leq L$ und habe den Erwartungswert $E(X) = 0$. Die additiven Rauschterme N_1 und N_2 seien normalverteilt mit $N_1 \sim \mathrm{N}(0, \sigma_1^2)$ und $N_2 \sim \mathrm{N}(0, \sigma_2^2)$. Das Eingangssignal der zweiten Stufe ist das Ausgangssignal der ersten Stufe multipliziert mit dem Faktor $\mu > 0$. Das Ausgangssignal der zweiten Stufe ist Z. Das Eingangssignal X und die beiden Rauschterme N_1 und N_2 seien gemeinsam stochastisch unabhängig.

a) Geben Sie die Kapazität $C_{X,Y}$ der ersten Stufe in Abhängigkeit von σ_1 und L an.

b) Sei $\mu = 1$. Berechnen Sie die maximale Transinformation $I_{\max}(Y, Z)$ zwischen Y und Z in Abhängigkeit von σ_1, σ_2 und L.

c) Sei μ wieder beliebig aber größer als Null. Berechnen Sie die Kapazität $C_{X,Z}$ des gesamten Kanals, also die maximale Transinformation zwischen X und Z in Abhängigkeit von σ_1, σ_2, L und μ.

Aufgabe 7. Gegeben sei ein komplexer MIMO-Kanal $\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{N}$ mit additiver Störung $\mathbf{N} \sim \mathrm{SCN}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma_N})$, wobei für die Störkovarianzmatrix $\mathbf{\Sigma_N} = 60 \cdot \mathbf{I}_4$ gilt. Die Kanalmatrix $\mathbf{H}$ sei

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3+i \\ \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix}.$$

Hinweis: Verwenden Sie für die gesamte Aufgabe den natürlichen Logarithmus.

a) Geben Sie die Anzahl der Sende- und Empfangsantennen an.

b) Das mittelwertfreie Eingangssignal unterliege einer Leistungsbeschränkung von

$$\mathrm{E}(\mathbf{X}^{\mathrm{H}}\mathbf{X}) \leq L = 5\,.$$

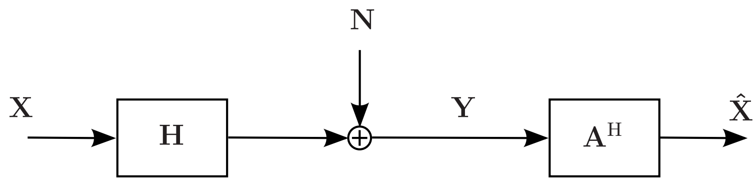
Zeigen Sie, dass diese Leistungsbeschränkung in Abhängigkeit von der Kovarianzmatrix $\mathbf{\Sigma_X}$ formuliert werden kann.

c) Berechnen Sie die Kapazität des MIMO-Kanals.

Auf der Empfängerseite soll nun das Empfangssignal $\mathbf{Y}$ gefiltert werden, so dass sich das Eingangssignal $\mathbf{X}$ möglichst gut aus $\hat{\mathbf{X}}$ rekonstruieren lässt (siehe Grafik).

Aus diesem Grund wurde mittels Optimierung eine optimale Filtermatrix $\mathbf{A}$ berechnet, für die gilt

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{H}} + \mathbf{\Sigma_N}\right)^{-1}\mathbf{H}\,.$$



d) Zeigen Sie, dass die Matrix $(\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{H}} + \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{N}})$ tatsächlich invertierbar ist.

Hinweis: Eine hermitesche Matrix ist invertierbar, wenn sie positiv definit ist. Eine hermitesche Matrix $\mathbf{A}$ ist positiv definit, wenn gilt

$$\mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0\,, \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n\,, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\,.$$

Aufgabe 8. Die Gesamtaufgabe besteht aus zwei Teilaufgaben, welche **unabhängig** voneinander lösbar sind.

Teil I

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x_1, x_2) \\ \text{subject to} & 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ & -x_1 + x_2 \geq -2 \\ & x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \in [0, \infty)\,. \end{array}$$

Zeichnen Sie die zulässige Menge. Geben Sie für folgende Zielfunktionen jeweils den optimalen Wert und die zugehörige Menge optimaler Lösungen an.

i) $f_0(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

ii) $f_0(x_1, x_2) = -x_1 - x_2$

iii) $f_0(x_1, x_2) = x_1$

Teil II

a) Ein lineares, zeitdiskretes SISO-System wird durch die Beziehung

$$y(t) = \sum_{i=0}^{t} h_i\, u(t - i)$$

beschrieben, wobei $t \in \mathbb{Z}$ ist. Für die weiteren Größen gilt:

- Eingangssignal $u(t) \in \mathbb{R}$ mit $u(t) = 0$ für $t < 0$
- Ausgangssignal $y(t) \in \mathbb{R}$
- Kanalkoeffizienten $h_i \in \mathbb{R}$ (gegeben) mit $h_i = 0$ für $i > N$

Geben Sie für die Abtastzeitpunkte $0 \leq t \leq N$ die Beziehung zwischen Ein- und Ausgangssignal in einer kompakten Matrix/Vektorschreibweise an.

b) Das Ausgangssignal $y(t)$ soll nun näherungsweise einem vorgegebenen Signal $y_{\text{ziel}}(t)$ folgen. Hierfür ist die betragsmäßig maximale Abweichung der Differenz $e(t) = y(t) - y_{\text{ziel}}(t)$ für die Zeitpunkte $0 \le t \le N$ möglichst klein zu halten, d.h.

$$\max_{0 \le t \le N} |e(t)| \to \min .$$

Um dieses Ziel zu erreichen, soll jetzt eine Steuerung für das Eingangssignal $u(t)$ entworfen werden. Dabei sind die folgenden technischen Spezifikationen zu beachten.

- Das Eingangssignal darf nur für die Zeitpunkte $0 \le t \le M$ gesteuert werden. Für die Zeitpunkte $M < t \le N$ muss das Eingangssignal Null sein.
- Die Energie des Eingangssignals $\sum_{t=0}^{N} u^2(t)$ darf die verfügbare Gesamtenergie E_{max} nicht überschreiten.
- Zwischen aufeinanderfolgenden Zeitpunkten t und $t+1$ darf sich der Wert des Eingangssignals betragsmäßig um nicht mehr als 0.25 ändern.

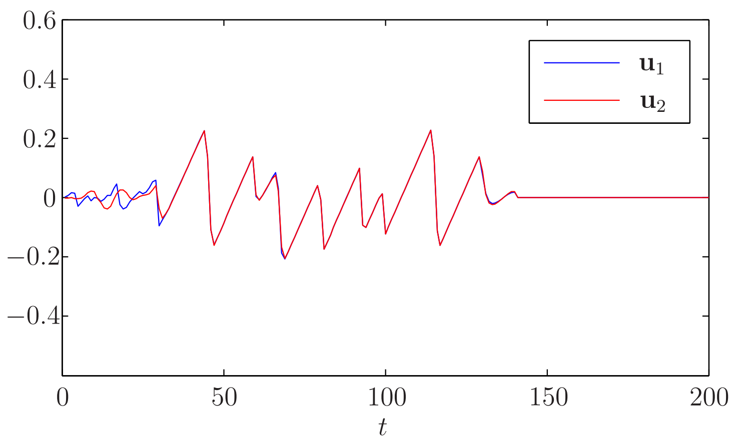
Formulieren Sie das obige Problem als Optimierungsproblem. Verwenden Sie dabei für die Zielfunktion die Matrix/Vektorschreibweise aus Aufgabenstellung **a)**.

Hinweis: Die Maximumsnorm eines Vektors $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ ist definiert als

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{0 \le t \le N} |x_t| .$$

c) Das obige Optimierungsproblem wird durch zwei verschiedene Algorithmen gelöst:

	Algorithmus 1	Algorithmus 2
Optimaler Vektor	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$
Wert der Zielfunktion	0.014936	0.014936



Die beiden Lösungsvektoren sind dabei unterschliedlich, d.h. es gilt $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{u}_2$ (siehe Grafik). Können Sie aus obigen Informationen schließen, dass bei einem der beiden Algorithmen ein Fehler aufgetreten ist?