11. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Georg Böcherer, Gernot Fabeck

25.01.2008

Eine Quelle S generiert die Symbole $\{A, B\}$ mit den Wahrscheinlichkeiten

$$P(S = A) = P(S = B) = \frac{1}{2}.$$

Das generierte Symbol soll über einen binären symmetrischen Kanal (BSC, Skript Beispiel 3.1.5) übertragen werden. Der BSC habe die Eingangsgrösse $X \in \{0, 1\}$ und die Ausgangsgrösse $Y \in \{0, 1\}$ und sei gedächtnislos. Die Kodierungs- und Dekodierungsregeln

$$X(S) = \begin{cases} 0, & \text{falls } S = A \\ 1, & \text{falls } S = B \end{cases}, \quad \hat{S}(Y) = \begin{cases} A, & \text{falls } Y = 0 \\ B, & \text{falls } Y = 1 \end{cases} \tag{1}$$

führen für die Schätzung $\hat{S}$ zu einer Fehlerwahrscheinlichkeit von $P(\hat{S} \neq S) = \epsilon$. Ein Amateurfunker will diese Fehlerwahrscheinlichkeit durch Repetitionskodierung verbessern und schlägt das folgende Kodierungsschema vor:

$$\boldsymbol{X}(S) = \begin{cases} (0,0), & \text{falls } S = A \\ (1,1), & \text{falls } S = B \end{cases}, \quad \hat{S}(\boldsymbol{Y}) = \begin{cases} A, & \text{falls } \boldsymbol{Y} = (0,0) \\ B, & \text{falls } \boldsymbol{Y} = (1,1) \\ \text{error}, & \text{sonst} \end{cases} \tag{2}$$

Da der Kanal gedächtnislos ist gilt

$$P\big[(Y_1, Y_2) = (y_1, y_2) \mid (X_1, X_2) = (x_1, x_2)\big] = P(Y_1 = y_1 \mid X_1 = x_1) P(Y_2 = y_2 \mid X_2 = x_2)$$

für alle $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \{0, 1\}^4$.

(a) Berechnen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit $P(\hat{S} \neq S)$ für Kodierungsschema (2).
Hinweis: $P(\hat{S} \neq S) > \epsilon$ *für* $0 < \epsilon < 1/2$

Offensichtlich hat Kodierungsschema (2) zu einer Erhöhung der Fehlerwahrscheinlichkeit im Vergleich zu Kodierungsschema (1) geführt. Im Folgenden sollen Sie zeigen, dass das in (2) verwendete Schema trotzdem eine optimale Repetitionskodierung der Tiefe 2 ist.
Hierfür wird die Datenverarbeitungsungleichung hilfreich sein, welche Folgendes besagt: Bilden X, Y, Z eine Markov-Kette, so gilt $I(X, Y) \leq I(X, Z)$, formal:

$$p_{X,Y,Z}(x, y, z) = p_X(x) p_{Y|X}(y|x) p_{Z|Y}(z|y) \quad \forall (x, y, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$$
$$\Rightarrow I(X, Y) \geq I(X, Z).$$

Die Mengen $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ bezeichnen die Träger der Zufallsvariablen X, Y, Z.
Gehen Sie nun wie folgt vor:

(b) Wie groß ist die Transinformation $I(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ im Vergleich zur Transinformation $I(X, Y)$?
Hinweis: $I(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) > I(X, Y)$ *für* $0 < \epsilon < 1/2$, *dies steht im Widerspruch zu (a).*

(c) Wie groß ist die Transinformation $I(S, \hat{S})$ für Schema (2) im Vergleich zur Transinformation $I(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$?
Ergebnis: $I(S, \hat{S}) = I(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$

(d) Zeigen Sie, dass $I(S, \hat{S}) \leq I(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ für alle möglichen Dekodierungsregeln $\hat{S}(\boldsymbol{Y})$. Benutzen Sie hierfür die Datenverarbeitungsungleichung.
Aus (c) und (d) folgt, dass Schema (2) *optimal ist.*