5. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Prof. Dr. Anke Schmeink, Andreas Bollig, Christoph Schmitz, Milan Zivkovic

18.11.2011

Aufgabe 1. Gegeben sei die gemeinsame Zähldichte $f_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$ von vier verschiedenen Signalpunkten (siehe Grafik 1). Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Wertes ist dabei für alle Punkte gleich.

a) Die gemeinsame Zähldichte ist in der unten stehenden Tabelle angegeben. Vervollständigen Sie diese Tabelle, indem Sie in der entsprechenden Spalte bzw. Zeile die dazugehörige Randdichte eintragen.

	$k=-1$	$k=0$	$k=+1$	$P(X=l)$
$l=-1$	0	1/4	0	
$l=0$	1/4	0	1/4	
$l=+1$	0	1/4	0	
$P(Y=k)$				

Hinweis: Für die Randdichte von X gilt: $P(X = l) = \sum_{y \in T_Y} P(X = l, Y = y)$, wobei T_Y der diskrete Träger von Y ist.

b) Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen X und Y unkorreliert sind.

Hinweis: Es gilt

$$\mathrm{E}(XY) = \sum_{k=-1}^{1} \sum_{l=-1}^{1} kl P(X = k, Y = l)\,.$$

c) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

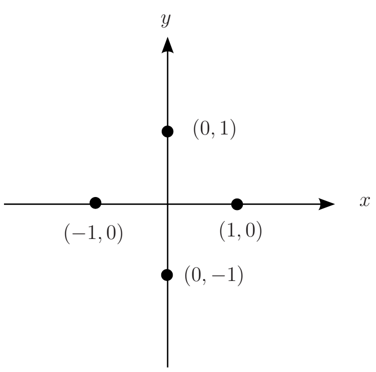

Figure 1: Signalkonstellationen

Aufgabe 2.

a) Gegeben sei der folgende SISO-Kanal (siehe Grafik 2), wobei der Pfadgewinn $h = \frac{1}{2}$ sei und die Eingabe X durch die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x) = e^{-x}\,\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$ beschrieben werde. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_Y(y)$ von Y.

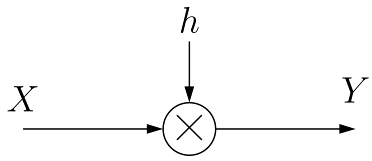

Figure 2: SISO-Kanal

b) Der Kanal werde nun durch je eine zweite Sende- und Empfangsantenne zu einem MIMO-Kanal erweitert. Die Ausgabe $\mathbf{Y}$ sei dann gegeben durch

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X},$$

mit $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ und Kanalmatrix $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$. X_1 und X_2 seien stochastisch unabhängig mit Wahrscheinlichkeitsdichten

$$f_{X_1}(x_1) = e^{-x_1}\,\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_1) \text{ und } f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x_2}{2}}\,\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x_2).$$

Bestimmen Sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$ von $\mathbf{Y}$.

Aufgabe 3.

a) Es seien X und Y zwei absolut-stetige Zufallsvariablen. Geben Sie die Randdichten von $f_X(x)$ und $f_Y(y)$ und die bedingten Dichten $f_{X|Y}(x|y)$ und $f_{Y|X}(y|x)$ auschließlich in Abhängigkeit von der gemeinsamen Dichte $f_{X,Y}(x, y)$ an.

b) Die gemeinsame Dichte lautet

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2\exp(-(x+y)) & 0 \leq y \leq x\,,\ x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die zugehörige bedingte Dichte $f_{Y|X}(y|x)$.