

8. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Simon Görtzen, Christoph Schmitz, Ehsan Zandi
05.12.2013

Aufgabe 1. Es seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zeigen Sie die folgenden Identitäten.

a) $\widehat{\mathbf{A}\mathbf{x}} = \widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{x}}$

b) $\widehat{\mathbf{x}}\widehat{\mathbf{y}} = \text{Re}(\mathbf{x}^*\mathbf{y})$

c) $\widehat{\mathbf{A}}^{-1} = \widehat{\mathbf{A}^{-1}}$

d) $\det \widehat{\mathbf{A}} = |\det \mathbf{A}|^2$

Aufgabe 2. In dieser Aufgabe soll Proposition 2.6.5 aus dem Skript bewiesen werden.

Sei $\mathbf{X} \sim \text{SCN}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{Q})$ ein n -dimensionaler Zufallsvektor. Zeigen Sie: Die Kovarianzmatrix \mathbf{Q} ist nicht-negativ definit. Gehen Sie wie folgt vor:

a) Zeigen Sie zunächst, dass für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ die quadratische Form $\mathbf{x}^*\mathbf{Q}\mathbf{x}$ reell ist.
Hinweis: Verwenden Sie die Eigenschaft, dass \mathbf{Q} hermitesch ist.

b) Zeigen Sie dann, dass für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ die quadratische Form $\mathbf{x}^*\mathbf{Q}\mathbf{x}$ nicht-negativ ist.
Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis aus a) und die Eigenschaften a) und b) aus Aufgabe 1.

Aufgabe 3. Beweisen Sie Proposition 2.6.8 der Vorlesung.

a) Sei $\mathbf{X} \sim \text{SCN}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{Q})$, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Dann gilt $\mathbf{A}\mathbf{X} \sim \text{SCN}(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{A}^*)$.

b) Seien $\mathbf{X} \sim \text{SCN}(\boldsymbol{\mu}_1, \mathbf{Q}_1)$ und $\mathbf{Y} \sim \text{SCN}(\boldsymbol{\mu}_2, \mathbf{Q}_2)$ stochastisch unabhängig. Dann gilt $\mathbf{X} + \mathbf{Y} \sim \text{SCN}(\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_2, \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2)$.