8. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr.-Ing. Anke Schmeink, Martijn Arts, Niklas Koep, Christoph Schmitz

19.12.2014

Aufgabe 1. Beweisen Sie Proposition 2.6.8 der Vorlesung.

a) Sei $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{Q})$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Dann gilt $\boldsymbol{AX} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{A\mu}, \boldsymbol{AQA}^*)$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Gültigkeit der Identität $\widehat{\boldsymbol{Ax}} = \hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{x}}$ für $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ und $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ mit den Bezeichnungen

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\boldsymbol{A}) & -\mathrm{Im}(\boldsymbol{A}) \\ \mathrm{Im}(\boldsymbol{A}) & \mathrm{Re}(\boldsymbol{A}) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\boldsymbol{x}) \\ \mathrm{Im}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}.$$

b) Seien $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{Q}_1)$ und $\boldsymbol{Y} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{Q}_2)$ stochastisch unabhängig. Dann gilt $\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{Q}_2)$.

Aufgabe 2. Es sei $\{X(t) \mid t > 0\}$ ein stochastischer Prozess. Die gemeinsame Verteilungsfunktion des Zufallsvektors $(X(t_1), X(t_2))'$ für zwei beliebige Zeitpunkte $t_1, t_2 > 0$ und $x_1, x_2 \geq 0$ laute

$$\begin{aligned} F_{(X(t_1),X(t_2))}(x_1, x_2) &= P\left(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\right) \\ &= \left(1 - \exp\left(-\frac{x_1^2}{t_1^2}\right)\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{x_2^2}{t_2^2}\right)\right). \end{aligned}$$

Berechnen und skizzieren Sie die Erwartungswertfunktion $\mu_X(t)$ des Prozesses. Berechnen Sie anschließend die zugehörige Autokorrelationsfunktion $R_{XX}(t_1, t_2)$.
Hinweis: Für

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1} e^{-x} \mathrm{d}x, \quad y > 0,$$

gilt $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ und $\Gamma(y + 1) = y\Gamma(y)$.