11. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr.-Ing. Anke Schmeink, Martijn Arts, Niklas Koep, Christoph Schmitz

23.01.2015

Aufgabe 1. Es sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Träger $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_m\}$ und der Verteilung

$$P(X = x_i) = p_i, \quad p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Zeigen Sie, dass für die Entropie $\mathrm{H}(X)$ die Ungleichung

$$0 \leq \mathrm{H}(X) \leq \log m$$

gilt, wobei Gleichheit in der linken Ungleichung genau dann gilt, wenn X einpunktverteilt ist, und Gleichheit rechts genau dann, wenn X auf $\mathcal{X}$ gleichverteilt ist.

Aufgabe 2. Die diskreten Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien identisch verteilt aber nicht notwendigerweise unabhängig. Ferner sei

$$\rho = 1 - \frac{\mathrm{H}(X_2|X_1)}{\mathrm{H}(X_1)}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\rho = \frac{\mathrm{I}(X_1;X_2)}{\mathrm{H}(X_1)}$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass $0 \leq \rho \leq 1$ gilt.

c) In welchem Fall gilt $\rho = 0$?

Aufgabe 3. Gegeben sei eine Nachrichtenquelle X, welche die diskreten Symbole x_1, x_2, x_3 mit den Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, p_3 sendet. Bestimmen Sie die maximale Entropie $\mathrm{H}(X)$ bezüglich der Symbolwahrscheinlichkeiten p_1, p_2, p_3.

Hinweis: Benutzen Sie die Lagrange-Multiplikatorregel, d.h. maximieren Sie für $\lambda \in \mathbb{R}_- = \{a \in \mathbb{R} \mid a < 0\}$ die Funktion

$$F(p_1, p_2, p_3) = \mathrm{H}(X) + \lambda \left(\sum_{i=1}^{3} p_i - 1 \right).$$