Prof. Dr. Anke Schmeink, Dr. Gholamreza Alirezaei, Martijn Arts, Christoph Schmitz

Übung 5

Montag, 23. November 2015

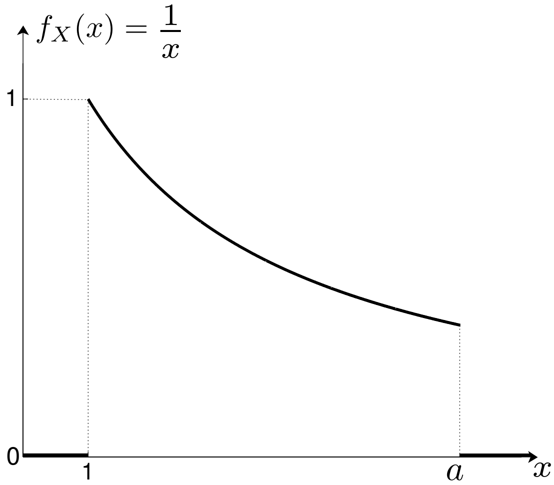
Aufgabe 1. Die Zeitdauer x bis zum Ausfall einer technischen Komponente wird durch eine exponential-verteilte Zufallsvariable X beschrieben. Der Erwartungswert $1/\lambda_X$ gibt dabei die mittlere Zeit bis zum Ausfall an.

Wenn die erste Komponente ausfällt, dann soll umgehend eine Ersatzkomponente den Betrieb übernehmen. Die Ersatzkomponente muss jedoch während der Lebensdauer der ersten Komponente unbenutzt verweilen, so dass sich die Ausfallwahrscheinlichkeit mit steigender Laufzeit x der ersten Komponente erhöht. Dieser Zusammenhang wird modelliert durch eine Exponentialverteilung mit dem Parameter $\lambda = \lambda_X(1 + \alpha x)$, wobei $0 < \alpha < 1$ gilt.

a) Interpretieren Sie den Parameter $1/\lambda$.

b) Die Zufallsvariable Y beschreibt die Nutzungsdauer der Ersatzkomponente. Geben Sie die Dichten von $f_X(x)$ und $f_{Y|X}(y|x)$ an. Berechnen Sie damit die Dichte von $f_Y(y)$.

Aufgabe 2. In mathematischen Programmen wie MATLAB ist es oft nicht möglich, Zufallszahlen mit beliebigen Verteilungen erzeugen zu lassen, sondern es steht nur eine $\mathrm{R}(0, 1)$-Verteilung (Gleichverteilung auf dem Intervall $(0, 1)$) zur Verfügung. Für einen bestimmten Anwendungsfall benötigen wir aber nun Stichproben einer Zufallsvariablen X mit der Dichte $f_X(x) = \frac{1}{x}\,\mathbb{I}_{(1,a)}(x)$.



a) Bestimmen Sie den Wert des Parameters a.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

c) Betrachten Sie die Transformation $Y = T(X)$ mit $T : (1, a) \to (b, c)$, $T(X) = \ln(X)$. Bestimmen Sie b und c sowie die Dichte $f_Y(y)$ von Y.

d) Welche Verteilung besitzt die Zufallsvariable Y? Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y.

e) Erläutern Sie, wie Stichproben der Zufallsvariablen X in MATLAB erzeugt werden können.

Aufgabe 3. Es seien X_1, X_2 stochastisch unabhängige Zufallsvariablen, jeweils $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$-verteilt. Zeigen Sie, dass gilt $X_1^2 + X_2^2 \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)$.