Prof. Dr. Anke Schmeink, Dr. Gholamreza Alirezaei, Martijn Arts, Christoph Schmitz

Übung 8

Montag, 14. Dezember 2015

Aufgabe 1. Es sei $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}_2(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ eine zweidimensionale normalverteilte Zufallsvariable mit $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ für $\sigma_1, \sigma_2 > 0$.

a) Geben Sie die Verteilungsdichte $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$ von $\boldsymbol{X}$ für $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ an. Vereinfachen Sie den Ausdruck soweit wie möglich.

b) Für $a, b > 0$ beschreibt die Menge

$$\mathcal{E}(a,b) = \left\{ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \right\}$$

eine Ellipse in 1. Hauptlage mit Halbachsenlängen a und b.

Zeigen Sie, dass es zu jedem $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, eine solche Ellipse $\mathcal{E}(a,b)$ gibt, die

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y}) \quad \text{für alle } \boldsymbol{y} \in \mathcal{E}(a,b)$$

erfüllt.

Es sei nun $a \in \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{SCN}(\mathbf{0}, \boldsymbol{Q})$ mit $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Weiterhin seien

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1+i & 1+i \\ 1+i & a-i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Definiere $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}$.

c) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{Y} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{R})$ verteilt ist mit

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 4 & (a+1)(1+i) \\ (a+1)(1-i) & a^2+3 \end{pmatrix}.$$

d) Wie ist die Zufallsvariable $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}$ verteilt? Geben Sie die Parameter der Verteilung explizit an.

e) Berechnen Sie für $a = 0$ und $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ den Funktionswert der Verteilungsdichte $f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y})$.

Aufgabe 2. Sei $\boldsymbol{X}$ zirkulär symmetrisch komplex verteilt mit Erwartungswert $\mathrm{E}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\mu}$.

a) Zeigen Sie: $\mathrm{E}[(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})'] = \mathbf{0}$.
Anmerkung: Die Matrix $\mathrm{E}[(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})'] = \mathbf{0}$ wird in der Literatur häufig *Pseudo-Kovarianzmatrix* genannt.

b) Sei X_l der l-te Eintrag des Vektors $\boldsymbol{X}$. Zeigen Sie: Der Realteil $\mathrm{Re}(X_l)$ und der Imaginärteil $\mathrm{Im}(X_l)$ sind unkorreliert.
Hinweis: Benutzen Sie das Ergebnis aus **a)**.

c) Sei $\boldsymbol{X}$ weiterhin zirkulär symmetrisch, nehme aber nur reelle Werte an. Wie ist $\boldsymbol{X}$ dann verteilt?

Aufgabe 3. Es sei $\{X(t) \mid t > 0\}$ ein stochastischer Prozess. Die gemeinsame Verteilungsfunktion des Zufallsvektors $(X(t_1), X(t_2))'$ für zwei beliebige Zeitpunkte $t_1, t_2 > 0$ und $x_1, x_2 \geq 0$ laute

$$\begin{aligned} F_{(X(t_1),X(t_2))}(x_1, x_2) &= P\left(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\right) \\ &= \left(1 - \exp\left(-\frac{x_1^2}{t_1^2}\right)\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{x_2^2}{t_2^2}\right)\right). \end{aligned}$$

Berechnen und skizzieren Sie die Erwartungswertfunktion $\mu_X(t)$ des Prozesses. Berechnen Sie anschließend die zugehörige Autokorrelationsfunktion $R_{XX}(t_1, t_2)$.
Hinweis: Für

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1} e^{-x} \mathrm{d}x, \quad y > 0,$$

gilt $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ und $\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$.