

Prof. Dr. Anke Schmeink, Dr. Gholamreza Alirezaei, Martijn Arts, Christoph Schmitz

## Übung 11

Montag, 18. Januar 2016

**Aufgabe 1.** Es sei  $X$  eine diskrete Zufallsvariable mit Träger  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_m\}$  und der Verteilung

$$P(X = x_i) = p_i, \quad p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m p_i = 1.$$

Zeigen Sie, dass für die Entropie  $H(X)$  die Ungleichung

$$0 \leq H(X) \leq \log m$$

gilt, wobei Gleichheit in der linken Ungleichung genau dann gilt, wenn  $X$  einpunktverteilt ist, und Gleichheit rechts genau dann, wenn  $X$  auf  $\mathcal{X}$  gleichverteilt ist.

**Aufgabe 2.** Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit Träger  $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3\}$  mit zugehöriger Zähldichte  $P(X = 0) = P(X = 2) = \frac{1}{8}$ ,  $P(X = 1) = \frac{1}{4}$  und  $P(X = 3) = \frac{1}{2}$ .

- Berechnen Sie die Entropie  $H(X)$ .
- Berechnen Sie die Entropie  $H(Y)$  der transformierten Zufallsvariable  $Y = 2^X$ .
- Berechnen Sie nun die Entropie  $H(Z)$  der transformierten Zufallsvariable  $Z = \sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$ .
- Betrachten Sie jetzt zwei diskrete Zufallsvariablen  $A$  und  $B$  mit zugehörigen Trägern  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$ . Zeigen Sie, dass allgemein für eine Abbildung  $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  mit  $B = g(A)$  gilt:

$$H(g(A)) \leq H(A).$$

Wann gilt Gleichheit?

**Hinweis:** Verwenden Sie in der Aufgabe den Logarithmus zur Basis zwei.