Prof. Dr. Anke Schmeink, Dr. Gholamreza Alirezaei, Martijn Arts, Christoph Schmitz

Zusatzübung

Donnerstag, 24. März 2016

Aufgabe 1. Es seien $X_1, X_2 \sim \mathrm{R}(0,1)$, wobei X_1 und X_2 stochastisch unabhängig sind. Betrachten Sie die mit dem Parameter $c > 0$ skalierte Zufallsvariable

$$Y = cX_1 \,.$$

Hinweis: Gehen Sie in der gesamten Aufgabe davon aus, dass die Voraussetzungen des Transformationssatzes für Dichten erfüllt sind.

a) Bestimmen Sie die Verteilungsdichte $f_Y(y)$ der Zufallsvariablen Y.

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert von Y.

c) Bestimmen Sie die Varianz von Y.

Der Zufallsvektor $\boldsymbol{Z}$ sei wie folgt definiert:

$$\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} X_1^2 \\ \sqrt{X_2} \end{pmatrix} .$$

d) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilungsdichte $f_{\boldsymbol{Z}}(z_1, z_2)$ des Zufallsvektors $\boldsymbol{Z}$.

Aufgabe 2. Die Gesamtaufgabe besteht aus **zwei** Teilen, die **unabhängig** voneinander gelöst werden können.

Teil I

Es werde der n-dimensional normalverteilte Zufallsvektor $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}_n(\boldsymbol{\mu_X}, \boldsymbol{\Sigma_X})$ betrachtet. Für die Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, den Vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ und den von $\boldsymbol{X}$ stochastisch unabhängigen m-dimensionalen Zufallsvektor $\boldsymbol{Z} \sim \mathrm{N}_m(\boldsymbol{\mu_Z}, \boldsymbol{\Sigma_Z})$ werde der Zufallsvektor

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{Z}$$

definiert.

a) Welche Verteilung besitzt $\boldsymbol{Y}$?

Nun seien $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ und $\boldsymbol{\Sigma_Z} = \boldsymbol{0}$, d.h. $\boldsymbol{Z}$ sei nun einpunktverteilt mit $\boldsymbol{\mu_Z} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}'$. Des Weiteren gelte

$$\boldsymbol{\mu_X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\Sigma_X} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 9 \end{pmatrix} .$$

Die Matrix $\boldsymbol{A}$ habe die Form

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

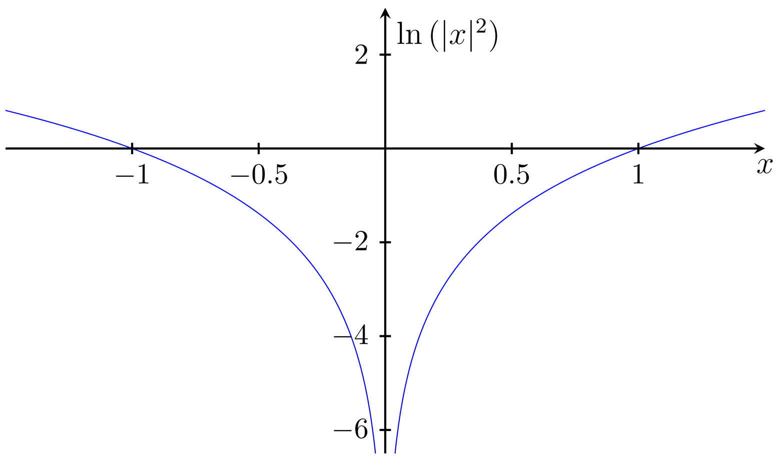
b) Bestimmen Sie für $\beta > 0$ den Parameter α so, dass Y_1 und Y_2 stochastisch unabhängig sind.

c) Bestimmen Sie jetzt den Parameter β so, dass $\boldsymbol{Y}$ zusätzlich mittelwertfrei ist.

d) Ermitteln Sie nun eine Matrix $\boldsymbol{W} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, die $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{Y}$ für die in b) und c) bestimmten Parametern in einen standardnormalverteilten Zufallsvektor transformiert, d.h. $\boldsymbol{V} \sim \mathrm{N}_2(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_2)$.

Teil II

Es sei $X \sim \mathrm{R}(-1, 1)$ und es werde die Transformation $Y = \ln(|X|^2)$ betrachtet:



e) Geben Sie den Träger der Zufallsvariablen Y an.

f) Da $\ln|x|$ nicht injektiv auf $[-1, 1]$ ist, kann der Transformationssatz für Dichten **nicht** genutzt werden, um eine Verteilung von Y zu bestimmen. Bestimmen Sie daher eine Dichte von Y, indem Sie die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$$

verwenden. Formen Sie dazu $P(Y \leq y) = P(\ln|X|^2 \leq y)$ in geeigneter Weise um.

Hinweis: Für $b \geq a$ gilt $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Aufgabe 3. Betrachten Sie den stochastischen Prozess $W(t) = Ve^{i2\pi f_0 t}$, wobei $V \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$ und $f_0 > 0$.

a) Ist der stochastische Prozess $\{W(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ schwach stationär? (Beweis erforderlich)

Hinweis: Es gilt $\mathrm{E}(V) = \frac{1}{\lambda}$.

Betrachten Sie nun den stochastischen Prozess $Y(t) = X(t)N(t)$, mit welchem multiplikatives Rauschen modelliert werden soll. Dabei sei $N(t)$ Gaußsches weißes Rauschen mit $\mathrm{E}(N(t)) = 0$ und $R_{NN}(t_1, t_2) = \frac{N_0}{2}\,\delta(t_1 - t_2)$. Zudem seien $N(t)$ und $X(t)$ unkorreliert.

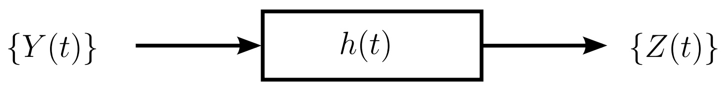
b) Bestimmen Sie die Erwartungswertfunktion $\mathrm{E}(Y(t))$ und die Autokorrelationsfunktion $R_{YY}(t_1, t_2)$ unter Berücksichtigung der angegebenen Größen.

c) Welche Bedingungen müssen für den stochastischen Prozess $X(t)$ gelten, damit $Y(t)$ schwach stationär ist.

Im Folgenden sei $X(t) = A$, wobei $A \sim \mathrm{R}(0, 2)$. In diesem Fall ist $\{Y(t)\}$ schwach stationär.

d) Bestimmen Sie das Leistungsdichespektrum $S_{YY}(f)$ von $\{Y(t)\}$.

Der stochastische Prozess wird gemäß dem unten abgebildeten System gefiltert. Dabei gilt für die Ausgabe des Systems $Z(t) = Y(t) - Y(t - t_0)$ mit $t_0 > 0$.

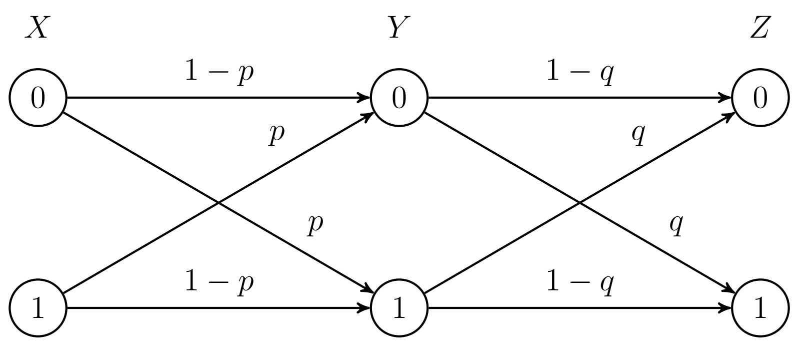


e) Geben Sie die Impulsantwort $h(t)$ des Systems an.

f) Nun soll das Leistungsdichtespektrum $S_{ZZ}(f) = S_{YY}(f)|H(f)|^2$ des Prozesses $\{Z(t)\}$ bestimmt werden. Berechnen Sie dazu $|H(f)|^2$.

Hinweis: Es gilt $e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin(x)$.

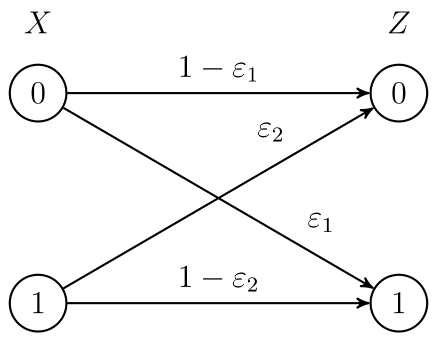
Aufgabe 4. Es werde der unten abgebildete Kanal betrachtet, der aus zwei verketteten binär-symmetrischen Kanälen besteht.



Anmerkung: Verwenden Sie in dieser Aufgabe den Logarithmus zur Basis zwei. Es gelte die Konvention $0 \cdot \log(0) = 0$.

a) Bestimmen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeiten ε_1 und ε_2 des äquivalenten Ersatzkanals.

b) Begründen Sie, ob es sich bei dem Ersatzkanal um einen symmetrischen Kanal handelt.



c) Betrachten Sie nun den Teilkanal $X \rightarrow Y$. Geben Sie ausgehend von der Kapazität dieses Kanals an, für welchen Wert des Parameters p die Kapazität zu Null wird.

d) Schließen Sie damit auf die Bedingungen für p und q, sodass die Kapazität des Gesamtkanals $X \rightarrow Z$ Null wird.

e) Für welche beiden Werte des Parameters p wird die Kapazität des Kanals $X \rightarrow Y$ Eins?

f) Für welche Kombinationen der Parameter p und q wird die Kapazität des Gesamtkanals $X \rightarrow Z$ Eins?

Hinweis: Es gilt $\mathrm{I}(X;Z) \leq \min\{\mathrm{I}(X;Y), \mathrm{I}(Y;Z)\}$.