1. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Daniel Bielefeld, Tobias Rick

05.04.2007

Aufgabe 38. Es seien $\mathcal{X} = \{x_1, ..., x_m\}$ ein Quellalphabet, $\mathcal{Y} = \{y_1, ..., y_d\}$ ein Kodealphabet und g ein e.d. Kode. Für $j = 1, ..., m$ bezeichne $P(X = x_j) = p_j$ die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Quellbuchstabens x_j und n_j bezeichne die Länge des Kodeworts $g(x_j)$. Zeigen Sie, dass für die erwartete Kodewortlänge $\bar{n}(g)$ gilt:

$$\bar{n}(g) = \frac{H(X)}{\log d} \quad \Leftrightarrow \quad p_j = d^{-n_j} \text{ für alle } j = 1, ..., m \text{ mit } p_j > 0.$$

Aufgabe 39. Es sei X eine Nachrichtenquelle mit Quellalphabet $\mathcal{X} = \{x_1, ..., x_6\}$ und Symbolwahrscheinlichkeiten $p = (p_1, ..., p_6) = (0.3, 0.2, 0.2, 0.1, 0.1, 0.1)$.
Konstruieren Sie einen binären PF-Kode g, für den gilt (Entropie in bit):

$$\bar{n}(g) < H(X) + 1.$$

Aufgabe 40. Ein PF-Kode g^* mit den Wortlängen $n_1^*, ..., n_m^*$ heißt *optimal*, wenn

$$\bar{n}(g^*) = \sum_{i=1}^{m} p_i n_i^* \leq \sum_{i=1}^{m} p_i n_i = \bar{n}(g)$$

für alle PF-Kodes g mit Wortlängen $n_1, ..., n_m$ ist.
Ein Algorithmus zur Konstruktion optimaler PF-Kodes ist das *Huffman-Verfahren*:

1. Ordne die Symbole des Quellalphabets nach fallenden Wahrscheinlichkeiten.
2. Konstruiere einen binären Baum mit den Quellbuchstaben als Blättern, wobei sukzessive neue Knoten gebildet werden durch das Zusammenfassen der beiden Knoten mit den geringsten Wahrscheinlichkeiten; markiere die neuen Knoten mit den jeweils addierten Wahrscheinlichkeiten.
3. Durch Rückwärtsgehen von der Wurzel zu den Blättern (hoch = 1, runter = 0) kann der Huffman-Kode abgelesen werden.

Bestimmen Sie für $\mathcal{X} = \{x_1, ..., x_8\}$ mit $p = (0.25, 0.2, 0.15, 0.15, 0.12, 0.05, 0.04, 0.04)$ und $\mathcal{Y} = \{0, 1\}$ einen Huffman-Kode. Berechnen Sie die erwartete Kodewortlänge des Kodes und vergleichen Sie diese mit $H(X)$.