

### 3. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Daniel Bielefeld, Tobias Rick

19.04.2007

**Aufgabe 44.** Gelten die folgenden für die Entropie einer diskreten Zufallsvariablen gültigen Beziehungen auch für die differentielle Entropie?

- a)  $H(T(X)) \leq H(X)$ ,
- b)  $H(X + Y) \leq H(X, Y)$ ,
- c)  $H(X + Y) \leq H(X) + H(Y)$ .

**Hinweise:**

**Zu a)** Betrachten Sie  $T(X) = 2X$ .

**Zu b)** Betrachten Sie  $X \sim R(0, 1)$ ,  $Y \sim R(0, 1)$ ,  $X$  und  $Y$  stochastisch unabhängig.

**Aufgabe 45.** Die Kullback-Leibler-Distanz zwischen zwei reellwertigen, absolut-stetigen Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  mit Dichten  $f$  bzw.  $g$  ist gegeben durch

$$D(f||g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \frac{f(x)}{g(x)} dx.$$

Berechnen Sie die Kullback-Leibler-Distanz für die Dichten von

- a)  $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$  und  $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$
- b)  $X \sim N(0, \sigma^2)$  und  $Y \sim N(0, \tau^2)$ .

Ist die Kullback-Leibler-Distanz *symmetrisch*, d.h. gilt  $D(f||g) = D(g||f)$ ?

**Aufgabe 46.** Bestimmen Sie  $I(X, Y)$ ,  $H(X|Y)$ , und  $H(Y|X)$  für

$$(X, Y) \sim N_2 \left( \mathbf{0}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

mit  $-1 < \rho < 1$ .