1. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Georg Böcherer, Daniel Bielefeld

11.04.2008

Aufgabe 1. Gegeben sei ein gedächtnisloser binärer symmetrischer Kanal mit Ein- und Ausgabealphabet $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$. Die Menge der Eingabewörter sei $\mathcal{C} = \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$. Dabei trete $(0, 0, 0)$ mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ sowie $(1, 1, 1)$ mit Wahrscheinlichkeit $3/4$ auf. Ferner sei $\epsilon = 1/3$.

a) Welche Ausgabewörter sind bei der Übertragung im Kanal möglich und wie groß sind deren Auftrittswahrscheinlichkeiten?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_K für die fehlerfreie Übertragung eines Eingabeworts?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_E dafür, ein Element aus $\mathcal{C}$ zu empfangen, das nicht gesendet wurde?

d) Geben Sie eine ML-Dekodierung $h_{ML} : \mathcal{Y}^3 \to \mathcal{C}$ an.

e) Geben Sie eine ME-Dekodierung $h_{ME} : \mathcal{Y}^3 \to \mathcal{C}$ an.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die differentielle Entropie der folgenden absolut-stetigen Zufallsvariablen X.

a) X ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, d.h.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0.$$

b) X ist Laplace-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$, d.h.

$$f(x) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}, x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die differentielle Entropie eines Empfangssignals Y, das zu einem festen Zeitpunkt als Überlagerung eines Sendesignals $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ und eines hiervon stochastisch unabhängigen Rauschsignals $Z \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ durch $Y = X + Z$ beschrieben wird.

Aufgabe 4.

a) Es seien $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ Matrizen. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA}).$$

b) Es sei $\mathbf{X} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Zufallsmatrix. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{E}(\mathrm{tr}(\mathbf{X})) = \mathrm{tr}(\mathrm{E}(\mathbf{X})).$$