2. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Chunhui Liu, Daniel Bielefeld

30.04.2009

Aufgabe 1. Gelten die folgenden für die Entropie einer diskreten Zufallsvariablen gültigen Beziehungen auch für die differentielle Entropie?

a) $\mathrm{H}(T(X)) \le \mathrm{H}(X)$,

b) $\mathrm{H}(X+Y) \le \mathrm{H}(X,Y)$,

c) $\mathrm{H}(X+Y) \le \mathrm{H}(X) + \mathrm{H}(Y)$,

d) $\mathrm{H}(X) \ge 0$.

Hinweise:
Zu a) Betrachten Sie $T(X) = 2X$.
Zu b) Betrachten Sie $X \sim \mathrm{R}(0,1)$, $Y \sim \mathrm{R}(0,1)$, X und Y stochastisch unabhängig.

Aufgabe 2. Die Kullback-Leibler-Distanz zwischen zwei reellwertigen, absolut-stetigen Zufallsvariablen X und Y mit Dichten f bzw. g ist gegeben durch

$$\mathrm{D}(f||g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \frac{f(x)}{g(x)} dx.$$

Berechnen Sie die Kullback-Leibler-Distanz für die Dichten von

a) $X \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2)$ und $Y \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)$

b) $X \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ und $Y \sim \mathrm{N}(0, \tau^2)$.

Ist die Kullback-Leibler-Distanz *symmetrisch*, d.h. gilt $\mathrm{D}(f||g) = \mathrm{D}(g||f)$?

Aufgabe 3.

a) Es seien $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ Matrizen. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA}).$$

b) Es sei $\mathbf{X} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Zufallsmatrix. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{E}(\mathrm{tr}(\mathbf{X})) = \mathrm{tr}(\mathrm{E}(\mathbf{X})).$$