1. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Fabian Altenbach, Michael Reyer

22.04.2010

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die differentielle Entropie der folgenden absolut-stetigen Zufallsvariablen.

a) X ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, d.h.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0.$$

b) X ist Laplace-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$, d.h.

$$f(x) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}, x \in \mathbb{R}.$$

c) $X = Y + Z$ ist Faltung der stochastisch unabhängigen Größen $Y \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $Z \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

Aufgabe 2. Gelten die folgenden für die Entropie einer diskreten Zufallsvariablen gültigen Beziehungen auch für die differentielle Entropie?

a) $\mathrm{H}(T(X)) \leq \mathrm{H}(X)$,

b) $\mathrm{H}(X+Y) \leq \mathrm{H}(X,Y)$,

c) $\mathrm{H}(X+Y) \leq \mathrm{H}(X) + \mathrm{H}(Y)$,

d) $\mathrm{H}(X) \geq 0$.

Hinweise:
Zu a) Betrachten Sie $T(X) = 2X$.
Zu b) Betrachten Sie $X \sim \mathrm{R}(0,1)$, $Y \sim \mathrm{R}(0,1)$, X und Y stochastisch unabhängig und die Beziehung $H(X,Y) = H(X) + H(Y)$ für stochastisch unabhängige Zufallsvariablen.

Bitte wenden!

Aufgabe 3. Gegeben sei eine BPSK-Modulation mit Amplituden $\mu > 0$ und die Symbole seien gleichverteilt, d.h. mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ wird entweder μ oder $-\mu$ gesendet. Das Signal X werde bei der Übertragung von einer additiven, gleichverteilten Rauschleistung auf dem Intervall $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ gestört, also gilt $Y = X + N$ mit $N \sim R\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ und X und N seien stochastisch unabhängig.

a) Geben Sie die Dichte f_Y an.

b) Berechen Sie die differentielle Entropie von f_Y.

c) Zeichnen Sie die differentielle Entropie von f_Y als Funktion von μ und interpretieren Sie das Ergebnis.