1. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Meik Dörpinghaus, Daniel Bielefeld

14.04.2011

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die differentielle Entropie der folgenden absolut-stetigen Zufallsvariablen.

a) X ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, d.h.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0.$$

b) $X = Y + Z$ ist Faltung der stochastisch unabhängigen Größen $Y \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $Z \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

Aufgabe 2. Gelten die folgenden für die Entropie einer diskreten Zufallsvariablen gültigen Beziehungen auch für die differentielle Entropie?

a) $\mathrm{H}(T(X)) \leq \mathrm{H}(X)$,

b) $\mathrm{H}(X+Y) \leq \mathrm{H}(X,Y)$,

c) $\mathrm{H}(X+Y) \leq \mathrm{H}(X) + \mathrm{H}(Y)$,

d) $\mathrm{H}(X) \geq 0$.

Hinweise:
Zu a) Betrachten Sie $T(X) = 2X$.
Zu b) Betrachten Sie $X \sim \mathrm{R}(0,1)$, $Y \sim \mathrm{R}(0,1)$, X und Y stochastisch unabhängig und die Beziehung $H(X,Y) = H(X) + H(Y)$ für stochastisch unabhängige Zufallsvariablen.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie $\mathrm{I}(X,Y)$, $\mathrm{H}(X|Y)$, und $\mathrm{H}(Y|X)$ für

$$(X,Y) \sim \mathrm{N}_2\left(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right)$$

mit $-1 < \rho < 1$.