2. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Meik Dörpinghaus, Daniel Bielefeld

21.04.2011

Aufgabe 1. Beweisen Sie die Kettenregel für die Transinformation:

$$I(X;Y,Z) = I(X;Z) + I(X;Y|Z).$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass für absolut-stetige Zufallsvektoren $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ mit Dichte $f(\mathbf{X})$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ folgender Zusammenhang gilt:

$$H(\mathbf{AX} + \mathbf{b}) = H(\mathbf{X}) + \log(|\mathbf{A}|).$$

Aufgabe 3.

a) Es seien $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ Matrizen. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA}).$$

b) Es sei $\mathbf{X} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Zufallsmatrix. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{E}(\mathrm{tr}(\mathbf{X})) = \mathrm{tr}(\mathrm{E}(\mathbf{X})).$$

Aufgabe 4. Die Kullback-Leibler-Distanz zwischen zwei reellwertigen, absolut-stetigen Zufallsvariablen X und Y mit Dichten f bzw. g ist gegeben durch

$$\mathrm{D}(f||g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \frac{f(x)}{g(x)} dx.$$

Berechnen Sie die Kullback-Leibler-Distanz für die Dichten von

a) $X \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2)$ und $Y \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)$

b) $X \sim \mathrm{N}(0, \sigma_1^2)$ und $Y \sim \mathrm{N}(0, \sigma_2^2)$.

Ist die Kullback-Leibler-Distanz *symmetrisch*, d.h. gilt $\mathrm{D}(f||g) = \mathrm{D}(g||f)$?