5. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Meik Dörpinghaus, Daniel Bielefeld

12.05.2011

Aufgabe 1. Die stochastischen Prozesse $\{Z_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ und $\{N_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ seien stochastisch unabhängig mit Z_i und N_i jeweils i.i.d. $\mathrm{N}(0,1)$ verteilt. Ein zeitdiskreter Kanal sei gegeben durch

$$Y_i = X_i + Z_i + N_{\lceil \frac{i}{2} \rceil}, \qquad i \in \mathbb{Z}.$$

Die Eingabe X_i unterliege der Leistungsbeschränkung $\mathrm{E}[X_i^2] \leq L = 1$.

a) Berechnen Sie die Kapazität des Kanals.
Hinweis: Stellen Sie den Kanal zunächst als einen parallelen Gaußkanal dar. Verwenden Sie dann die entsprechende Kapazitätsformel.

b) Für welche Eingangsverteilung wird die Kapazität erreicht?

Aufgabe 2. Gegeben sei ein Kanal dessen Ausgang wie folgt gegeben ist:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{N}$$

mit dem Eingangsvektor $\mathbf{X}$ und dem additiven Rauschvektor $\mathbf{N}$. Alle Vektoren haben die Dimension N.

Sowohl $\mathbf{X}$ als auch $\mathbf{N}$ sind N-dimensional normalverteilt mit

$$\mathbf{X} \sim \mathrm{N}_N(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma_X})$$
$$\mathbf{N} \sim \mathrm{N}_N(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma_N}).$$

Die Zufallsvektoren $\mathbf{X}$ und $\mathbf{N}$ sind stochastisch unabhängig. Die Kovarianzmatrizen erfüllen folgenden Bedingungen:

$$\mathrm{tr}\,[\mathbf{\Sigma_X}] \leq N \cdot \sigma_{\mathbf{X}}^2$$
$$\mathrm{tr}\,[\mathbf{\Sigma_N}] = N \cdot \sigma_{\mathbf{N}}^2.$$

Außerdem ist $\mathbf{\Sigma_N}$ positiv definit.

a) Bestimmen Sie für ein gegebenes $\mathbf{\Sigma_N}$ die Eingangkovarianzmatrix $\mathbf{\Sigma_X}$, die die Transinformation maximiert, und geben Sie die Kapazität an.

b) Für welches $\mathbf{\Sigma_N}$ wird die Kapazität des Kanals minimiert?

Hinweis: Sie können zur Vereinfachung annehmen, dass für das gesuchte $\mathbf{\Sigma_N}$ die Kovarianzmatrix $\mathbf{\Sigma_X}$ der kapazitätserreichenden Eingangsverteilung positiv definit ist.

Aufgabe 3. Gegeben sei ein reeller paralleler Gauß-Kanal

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} .$$

Das Eingangssignal $\mathbf{X}$ unterliegt der Leistungsbeschränkung $\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma_X}) \leq P$. Für die Kovarianzmatrix des normalverteilten, Störterms $\mathbf{Z}$ mit $\mathrm{E}[\mathbf{Z}] = \mathbf{0}$ gelte weiterhin

$$\mathbf{\Sigma_Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie die Kapazität des Kanals und erklären Sie das Ergebnis.

b) Es soll auf der Empfangsseite des Kanals ein Vektor $\mathbf{b}$ derart konstruiert werden, so dass die Komponente X_1 fehlerfrei übertragen wird. Finden Sie hierfür eine geeignete lineare Transformation

$$\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y} = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}(\mathbf{X} + \mathbf{Z}) \ , \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 .$$

Warum ist eine fehlerfreie Übertragung möglich?

Hinweis: Berechnen Sie $\mathbf{b}$ so, dass die Varianz von $W = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}$ gleich Null ist.