6. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Meik Dörpinghaus, Daniel Bielefeld

19.05.2011

Aufgabe 1. (Entspricht Aufgabe 3 auf Übungsblatt 5)

Gegeben sei ein reeller paralleler Gauß-Kanal

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} .$$

Das Eingangssignal $\mathbf{X}$ unterliegt der Leistungsbeschränkung $\operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma_X}) \leq P$. Für die Kovarianzmatrix des normalverteilten, Störterms $\mathbf{Z}$ mit $\mathrm{E}[\mathbf{Z}] = \mathbf{0}$ gelte weiterhin

$$\mathbf{\Sigma_Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie die Kapazität des Kanals und erklären Sie das Ergebnis.

b) Es soll auf der Empfangsseite des Kanals ein Vektor $\mathbf{b}$ derart konstruiert werden, so dass die Komponente X_1 fehlerfrei übertragen wird. Finden Sie hierfür eine geeignete lineare Transformation

$$\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y} = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}(\mathbf{X} + \mathbf{Z}) \ , \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 .$$

Warum ist eine fehlerfreie Übertragung möglich?

Hinweis: Berechnen Sie $\mathbf{b}$ so, dass die Varianz von $W = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}$ gleich Null ist.

Aufgabe 2. Es seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ zwei hermitsche positiv definite $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathbf{A} > \mathbf{B} \Rightarrow |\mathbf{A}| \geq |\mathbf{B}|.$$

($\mathbf{A} > \mathbf{B}$ ist eine Kurzschreibweise für “die Matrix $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ ist positiv definit”).

Aufgabe 3. Seien $n \in \mathbb{N}$, $L > 0$ und $\lambda_1, ..., \lambda_n > 0$. Zeigen Sie, dass das Optimierungsproblem

$$\max_{x_1,...,x_n \in \mathbb{R}_+} \prod_{i=1}^{n} (x_i + \lambda_i), \text{ so dass } \sum_{i=1}^{n} x_i \leq L$$

die Lösung $x_i = (\nu - \lambda_i)^+$ besitzt, wobei ν die eindeutige Lösung ist von

$$\sum_{i=1}^{n} (\nu - \lambda_i)^+ = L.$$

Hinweis: Gehen Sie in folgenden Schritten vor:

- Zeigen Sie, dass für jede optimale Lösung $(x_1, ..., x_n)$ gilt
  - (i) $\sum_{i=1}^{n} x_i = L$,
  - (ii) $x_i + \lambda_i = x_j + \lambda_j$ für alle $x_i, x_j > 0$.
- Folgern Sie $x_i = (\nu - \lambda_i)^+$ für alle i und $\sum_{i=1}^{n} (\nu - \lambda_i)^+ = L$.