10. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Anke Schmeink, Martijn Arts, Andreas Bollig, Christoph Schmitz

05.07.2012

Aufgabe 1. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Definitionen konvexer, reeller Funktionen.

a) Für alle $x_1, x_2, 0 \leq \lambda \leq 1$ gilt $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$.

b) Für alle $x_1 < x < x_2$ gilt $f(x) \leq \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$.

c) Für alle $x_1 < x < x_2$ gilt $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$.

Sei zusätzlich f zweifach differenzierbar, zeigen Sie dass dann **d)** ebenfalls eine äquivalente Definition darstellt.

d) $f''(x) \geq 0$.

Hinweise:

- Zeigen und benutzen Sie: Ist f konvex, dann gilt für alle $x_1 < x < x_2$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

- Benutzen Sie die Aussage (Mittelwertsatz), dass ein $x \in (x_1, x_2)$ existiert mit

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x).$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen konvex sind.

a) $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x_i), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}_+^n, f_i, i = 1, \ldots, n$ konvex

b) $g(\boldsymbol{p}) = -\sum_{i=1}^{n} a_i \ln(1 + b_i p_i), \quad \boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}_+^n$

c) $h(x) = \max_{i=1,\ldots,n} f_i(x), \quad x \in \mathbb{R}, f_i, i = 1, \ldots, n$ konvex

Aufgabe 3. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Norm, wenn gilt

i) f ist nichtnegativ: $f(\mathbf{x}) \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

ii) f ist definit: $f(\mathbf{x}) = 0$ nur für $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

iii) f ist homogen: $f(t\mathbf{x}) = |t| f(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$

iv) f erfüllt die Dreiecksungleichung: $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$.

Zeigen Sie, dass jede Norm eine konvexe Funktion ist.

Aufgabe 4. Die l_p-Vektornorm eines Vektors $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, p \geq 1 \,.$$

Zwei wichtige Spezialfälle sind die l_1- und die l_∞-Vektornorm

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \,.$$

Formulieren Sie die folgenden Optimierungsprobleme mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ als lineare Programme

a) $\underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \, \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_1 \quad \text{subject to } \|\mathbf{x}\|_\infty \leq 1$

b) $\underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \, \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_\infty \quad \text{subject to } \|\mathbf{x}\|_1 \leq 1$

c) $\underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \, \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_1 + \|\mathbf{x}\|_\infty$

Hinweis: Das Optimierungsproblem

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \, f(\mathbf{x})$$

lässt sich mit $t \in \mathbb{R}$ äquivalent umschreiben zu

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x},t}{\text{minimize}} & t \\ \text{subject to} & f(\mathbf{x}) \leq t \,. \end{array}$$