10. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Fabian Altenbach, Gholamreza Alirezaei, Christoph Schmitz

11.07.2013

Aufgabe 1.

a) Ein lineares, zeitdiskretes SISO-System werde durch die Beziehung

$$y(t) = \sum_{i=0}^{t} h_i u(t-i)$$

beschrieben, wobei $t \in \mathbb{Z}$ ist. Für die weiteren Größen gilt:

- Eingangssignal $u(t) \in \mathbb{R}$ mit $u(t) = 0$ für $t < 0$
- Ausgangssignal $y(t) \in \mathbb{R}$
- FIR Kanalkoeffizienten $h_i \in \mathbb{R}$ (bekannt) mit $h_i = 0$ für $i > N$

Geben Sie für die Abtastzeitpunkte $0 \leq t \leq N$ die Beziehung zwischen Ein- und Ausgangssignal in einer kompakten Matrix-Vektorschreibweise an.

b) Das Ausgangssignal $y(t)$ soll nun näherungsweise einem vorgegebenen Signal $y_{\text{ziel}}(t)$ folgen können. Hierfür ist die betragsmäßig maximale Abweichung der Differenz $e(t) = y(t) - y_{\text{ziel}}(t)$ für die Zeitpunkte $0 \leq t \leq N$ möglichst klein zu halten

$$\max_{0 \leq t \leq N} |e(t)| \rightarrow \min .$$

Um dieses Ziel zu erreichen, soll jetzt eine Steuerung für das Eingangssignal $u(t)$ entworfen werden. Dabei sind die folgenden technischen Spezifikationen zu beachten.

- Das Eingangssignal darf nur für die Zeitpunkte $0 \leq t \leq M$ gesteuert werden. Für Zeitpunkte $M < t \leq N$ muss das Eingangssignal Null sein.
- Die betragsmäßig maximale Amplitude des Eingangssignals darf den Wert U nicht überschreiten.
- Zwischen aufeinanderfolgenden Zeitpunkten t und $t+1$ darf sich die Amplitude des Eingangssignals betragsmäßig nicht mehr als um S ändern.

Formulieren Sie das obige Problem als Optimierungsproblem.

Hinweis: Verwenden Sie für die Zielfunktion die kompakte Matrix-Vektorschreibweise aus Aufgabenstellung **a)** und eine entsprechend der Aufgabenstellung passende Vektornorm.

c) Transformieren sie das Optimierungsproblem aus **b)** in ein lineares Programm.

Bitte wenden!

Aufgabe 2. Gegeben sei das unten dargestellte MIMO-System. Das eingangsseitige Datensymbol x soll ausgangsseitig möglichst gut durch $\hat{x}$ rekonstruiert werden. Ziel der Aufgabe ist es, hierfür die optimalen, linearen Sende- und Empfangsvektoren $\mathbf{b}$ bzw. $\mathbf{a}$ zu bestimmen.

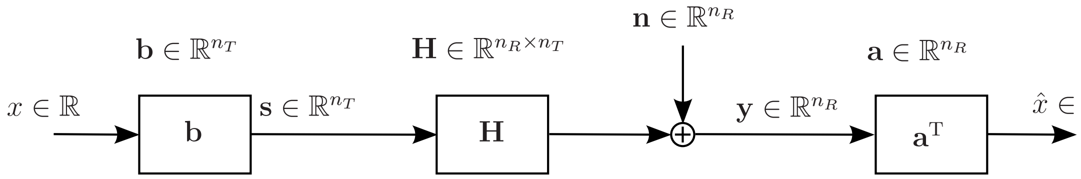

Figure 1: MIMO-System

Für die gesamte Aufgabe werden folgende Annahmen gemacht: Es gibt keine Unterscheidung bezüglich der Groß- und Kleinschreibung der Zufallsgrößen x und $\mathbf{n}$ und deren Realisierung. Das mittelwertfreie Datensymbol ist normiert auf $\mathrm{E}[x^2] = 1$. Für die additive Störung gilt $\mathbf{n} \sim N_{n_R}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma_n})$. Die Kanalmatrix $\mathbf{H}$ sei fest und bei Sender und Empfänger bekannt.

a) Geben Sie $\hat{x}$ in Abhängigkeit vom Eingangssymbol x und dem Störterm $\mathbf{n}$ an.

b) Das Sendesymbol $\mathbf{s}$ unterliege einer Leistungsbeschränkung $\mathrm{E}[\mathbf{s}^{\mathrm{T}}\mathbf{s}] \leq P_T$. Zeigen Sie, dass diese Leistungsbeschränkung ausschließlich in Abhängigkeit vom Sendevektor $\mathbf{b}$ formuliert werden kann.

Zur Rekonstruktion von $\hat{x}$ soll der mittlere quadratische Fehler (mean square error)

$$\begin{aligned}\mathrm{MSE}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &:= \mathrm{E}[(x - \hat{x})^2] \\ &= \mathbf{a}^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}\mathbf{b}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}^{\mathrm{T}} + \mathbf{\Sigma_n})\mathbf{a} + 1 - \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{b} - \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}\,.\end{aligned}$$

bezüglich des Sendevektors $\mathbf{b}$ und des Empfangsvektors $\mathbf{a}$ minimiert werden. Das allgemeine Optimierungsproblem lautet für diesen Fall

$$\begin{aligned}\underset{\mathbf{a},\mathbf{b}}{\text{minimize}} \quad & \mathrm{MSE}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ \text{subject to} \quad & \mathrm{tr}(\mathbf{b}\mathbf{b}^T) \leq P_T\,.\end{aligned}$$

Es lässt sich zeigen, dass dieses Problem durch hierarchische Optimierung getrennt gelöst werden kann. Es soll daher zuerst ein optimaler Empfangsvektor $\mathbf{a}^*$ als Lösung von

$$\underset{\mathbf{a}}{\text{minimize}} \quad \mathrm{MSE}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

bestimmt werden.

c) Bestimmen Sie einen optimalen Empfangsvektor $\mathbf{a}^*$, der $\mathrm{MSE}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ minimiert. Gehen Sie dabei davon aus, dass der Vektor $\mathbf{b}$ fest ist. Sie können weiterhin die beiden folgenden Beziehungen ohne Beweis benutzen

$$\frac{\partial \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{c}\,, \quad \frac{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = (\mathbf{D} + \mathbf{D}^{\mathrm{T}})\mathbf{x}\,.$$

d) Zeigen Sie, dass obiges Optimierungsproblem ein konvexes Optimierungsproblem ist. Verwenden Sie hierfür die folgendene Beziehung zwischen einer konvexen Funktion f und ihrer Hesse-Matrix $\nabla^2 f(\mathbf{x})$

$$f(\mathbf{x}) \text{ ist konvex} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2 f(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}\,.$$

e) Zeigen Sie mit Hilfe der Beziehung

$$\left(\mathbf{H}\mathbf{b}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}^{\mathrm{T}} + \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{n}}\right)^{-1}\mathbf{H}\mathbf{b} = \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{n}}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{b}\frac{1}{1+\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{n}}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{b}}$$

die Gültigkeit von

$$\mathrm{MSE}(\mathbf{b}) := \mathrm{MSE}(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}) = \frac{1}{1+\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{n}}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{b}}\,.$$

Im Folgenden soll ein optimaler Sendevektor $\mathbf{b}^*$ bestimmt werden. Hierfür ist das verbleibende Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{b}}{\text{minimize}} & \mathrm{MSE}(\mathbf{b}) \\ \text{subject to} & \mathrm{tr}(\mathbf{b}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}) \leq P_T \end{array}$$

zu lösen. Aus der Matrix-Analysis ist das sogenannte Rayleigh-Ritz-Theorem bekannt. Dieses besagt, dass für eine hermitesche Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A}) = \begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{maximize}} & \mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} \\ \text{subject to} & \mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{x} = 1\,, \end{array}$$

wobei $\lambda_{\max}(\mathbf{A})$ der maximale Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}$ ist.

f) Finden Sie unter Berücksichtigung des Rayleigh-Ritz-Theorems einen optimalen Sendevektor $\mathbf{b}^*$. Sie können dabei davon ausgehen, dass die Leistungsbeschränkung mit Gleichheit erfüllt wird.

g) Erklären Sie das Ergebnis aus **f)**.