2. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr.-Ing. Anke Schmeink, Simon Görtzen, Christoph Schmitz, Ehsan Zandi

15.04.2014

Aufgabe 1. Die Kullback-Leibler-Distanz zwischen zwei reellwertigen, absolut-stetigen Zufallsvariablen X und Y mit Dichten f bzw. g ist gegeben durch

$$\mathrm{D}(f||g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \frac{f(x)}{g(x)} dx.$$

Berechnen Sie die Kullback-Leibler-Distanz für die Dichten von

a) $X \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2)$ und $Y \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)$

b) $X \sim \mathrm{N}(0, \sigma_1^2)$ und $Y \sim \mathrm{N}(0, \sigma_2^2)$.

Ist die Kullback-Leibler-Distanz *symmetrisch*, d.h. gilt $\mathrm{D}(f||g) = \mathrm{D}(g||f)$?

Aufgabe 2. Bestimmen Sie $\mathrm{I}(X, Y)$, $\mathrm{H}(X|Y)$, und $\mathrm{H}(Y|X)$ für

$$(X, Y) \sim \mathrm{N}_2 \left(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

mit $-1 < \rho < 1$.

Aufgabe 3. Es sei $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ ein absolut-stetiger Zufallsvektor mit Dichte $f_{\boldsymbol{X}}$, und es seien $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{H}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}) = \mathrm{H}(\boldsymbol{X}) + \log(|\det \boldsymbol{A}|).$$

Hinweis: Benutzen Sie den Transformationssatz Theorem 2.4.12 für die lineare Abbildung $T(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}$.