

1. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr.-Ing. Anke Schmeink, Martijn Arts, Niklas Koep, Christoph Schmitz

15.04.2015

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die differentielle Entropie der folgenden absolut-stetigen Zufallsvariablen:

- a) X ist gleichverteilt auf dem Intervall $[a, b]$, $b > a$, d.h.

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{I}_{[a,b]}(x).$$

- b) X ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, d.h.

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

- c) X ist Laplace-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$, d.h.

$$f_X(x) = \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda |x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- d) X ist die Summe der stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen $Y \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $Z \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

Aufgabe 2. Es sei $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ ein absolut-stetiger Zufallsvektor mit Dichte $f_{\mathbf{X}}$. Des Weiteren seien $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor. Zeigen Sie, dass

$$H(\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}) = H(\mathbf{X}) + \log |\mathbf{A}|.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Transformationssatz für die lineare Abbildung $T(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}$.

Aufgabe 3. Die Kullback-Leibler-Distanz zwischen zwei reellwertigen, absolut-stetigen Zufallsvariablen X und Y mit Dichten f bzw. g ist gegeben durch

$$D(f \parallel g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \frac{f(x)}{g(x)} dx.$$

Berechnen Sie die Kullback-Leibler-Distanz zwischen den Zufallsvariablen X und Y für

- a) $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ und $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$,
b) $X \sim N(0, \sigma_1^2)$ und $Y \sim N(0, \sigma_2^2)$.

Ist die Kullback-Leibler-Distanz symmetrisch, d.h. gilt $D(f \parallel g) = D(g \parallel f)$?