Zusatzübung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr.-Ing. Anke Schmeink, Martijn Arts, Niklas Koep, Christoph Schmitz

05.08.2015

Aufgabe 1. Die Gesamtaufgabe besteht aus **drei** Teilen, die **unabhängig** voneinander gelöst werden können.

Anmerkung: Verwenden Sie in dieser Aufgabe den natürlichen Logarithmus.

Teil I

a) Gegeben Sei die Funktion $f_X : [1, \infty) \to \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$f_X(x) = \beta x^{-\alpha}$$

mit $\alpha > 1$. Wählen Sie den Parameter β als Funktion von α so, dass f_X die Dichte einer absolut-stetigen Zufallsvariablen X darstellt.

b) Berechnen Sie die differentielle Entropie der Zufallsvariablen X aus Unterpunkt **a)**.

Hinweis: Es gilt

$$\int_1^\infty x^{-\alpha} \ln(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{(\alpha-1)^2} .$$

Teil II

c) Zeigen Sie, dass für zwei unabhängig identisch verteilte absolut-stetige Zufallsvariablen U und V der Zusammenhang $\mathrm{H}(U+V) = 2\,\mathrm{H}(U)$ im Allgemeinen **nicht** gilt. Betrachten Sie dazu den Fall $U, V \sim \mathrm{R}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Hinweis: Die Entropie einer auf $[-1, 1]$ dreiecksverteilten Zufallsvariablen W mit Dichtefunktion

$$f_W(w) = \begin{cases} 1 - |w| & \text{für } -1 \le w \le 1\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

lautet $\mathrm{H}(W) = \frac{1}{2}$.

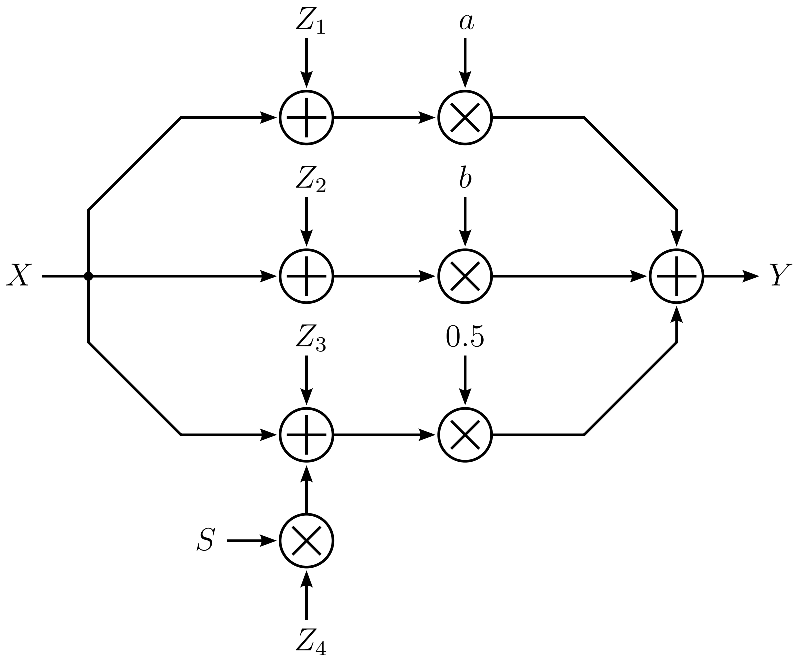
Teil III

Nun werde ein Übertragungskanal, beschrieben durch den Zusammenhang $Y = X + Z$, betrachtet. Es wird angenommen, dass die Kanaleingabe X und die Kanalstörung Z stochastisch unabhängig sind. Die differentielle Entropie der Zufallsvariablen Y laute $\mathrm{H}(Y) = \ln(\lambda)$ mit $\lambda > 0$; die Störung Z sei mittelwertfrei normalverteilt mit Varianz σ^2.

d) Bestimmen Sie die bedingte Entropie $\mathrm{H}(Y|X)$ und die Transinformation $\mathrm{I}(X;Y)$.

e) Nun wird angenommen, dass auch X mittelwertfrei normalverteilt ist mit Varianz σ_X^2. Geben Sie für diesen Fall die Varianz von X als Funktion von λ und σ^2 an.

Aufgabe 2. Gegeben sei der unten abgebildete Kanal:



Der Kanaleingang wird mit der mittelwertfreien Zufallsvariablen X beschrieben, der Kanalausgang mit der Zufallsvariablen Y. Die additiven Rauschterme sind wie folgt verteilt: $Z_1 \sim \mathrm{N}(0,2)$, $Z_2 \sim \mathrm{N}(0,4)$, $Z_3 \sim \mathrm{N}(0,4)$ und $Z_4 \sim \mathrm{N}(0,2)$. Der Kanaleingang und die Rauschterme sind gemeinsam stochastisch unabhängig. Für die Parameter gilt $a, b \in [0, 0.5]$ und $a + b = 0.5$. Es besteht eine Leistungsbeschränkung des Eingangs, sodass $\mathrm{E}(X^2) \leq 10$.

Anmerkung: Verwenden Sie in dieser Aufgabe den natürlichen Logarithmus.

Es sei zunächst $S = 0$.

a) Bestimmen Sie die Kapazität des Kanals in Abhängigkeit der Parameter a und b.

b) Für welchen Wert a ist die Kapazität des Kanals maximal, wenn $b = 0.5 - a$ gilt? Berechnen Sie die Kapazität für diesen Fall und geben Sie an wie X verteilt sein muss, damit die Kapazität erreicht wird.

Nun sei S eine diskrete Zufallsvariable mit Zähldichte $P(S = -1) = 0.2$ und $P(S = 1) = 0.8$. Nehmen Sie an, dass S von X und $Z_i, i = 1, \ldots, 4$, stochastisch unabhängig ist.

c) Berechnen Sie Kanalkapazität für $b = 0.5 - a$ und $a = 0.25$.

Aufgabe 3. Die Gesamtaufgabe besteht aus **zwei** Teilen, die **unabhängig** voneinander gelöst werden können.

Teil I
Gegeben sei folgendes komplexes MIMO-System mit Kanaleingang $\boldsymbol{X}$ und Kanalausgang $\boldsymbol{Y}$. Das konstante Übertragungsverhalten des Kanals ist bekannt und wird durch die Kanalmatrix $\boldsymbol{H}$ beschrieben:

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \sqrt{8} & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Additive Störungen werden durch die Zufallsvariable $\boldsymbol{Z} \sim \mathrm{SCN}(0, \sigma^2\, \boldsymbol{I}_3)$ mit $\sigma^2 = 3$ modelliert und sind vom Kanaleingang $\boldsymbol{X}$ stochastisch unabhängig. Insgesamt ergibt sich das Modell $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Z}$. Der Kanaleingang unterliege der Leistungsbeschränkung $L = 8$.

a) Berechnen Sie die Kapazität des MIMO-Kanals. Verwenden Sie den Logarithmus zur Basis zwei.

b) Mit welcher Eingangsverteilung wird die Kapazität erreicht? Berechnen Sie die zugehörige Kovarianzmatrix $\boldsymbol{Q}$.

Teil II
Betrachten Sie die folgenden Vektoren $\boldsymbol{\lambda}_j$, die jeweils die Eigenwerte zugehöriger Matrizen $\boldsymbol{A}_j$ für $j = 1, \ldots, 4$ enthalten:

$$\boldsymbol{\lambda}_1 = \begin{pmatrix} 0.31 \\ 1.4i \\ 0.84 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\lambda}_2 = \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0.23 \\ 0.14 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\lambda}_3 = \begin{pmatrix} 0.31 \\ 0.53 \\ 0.84 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\lambda}_4 = \begin{pmatrix} 0.31 \\ 0.53 \\ 0.84 \\ 0.2 \end{pmatrix}.$$

c) Entscheiden Sie jeweils anhand der Eigenwertvektoren $\boldsymbol{\lambda}_j$, ob die zugehörige Matrix $\boldsymbol{A}_j$ eine gültige Matrix eines MIMO-Systems mit 4 Empfangsantennen und 3 Sendeantennen sein kann, sodass mit der entsprechenden Kanalmatrix $\boldsymbol{H}_j$ gilt, dass $\boldsymbol{H}_j^*\boldsymbol{H}_j = \boldsymbol{A}_j$ für $j = 1, \ldots, 4$. Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 4. Die Gesamtaufgabe besteht aus **zwei** Teilen, die **unabhängig** voneinander gelöst werden können.

Teil I

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, 3$, mit

(i) $f_1(x_1, x_2) = x_1$,

(ii) $f_2(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2$,

(iii) $f_3(x_1, x_2) = -x_1 + x_2^2$,

konvex sind.

Hinweis: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist konvex, wenn ihre Hesse-Matrix positiv semidefinit ist, d.h.:

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \forall\, (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \,.$$

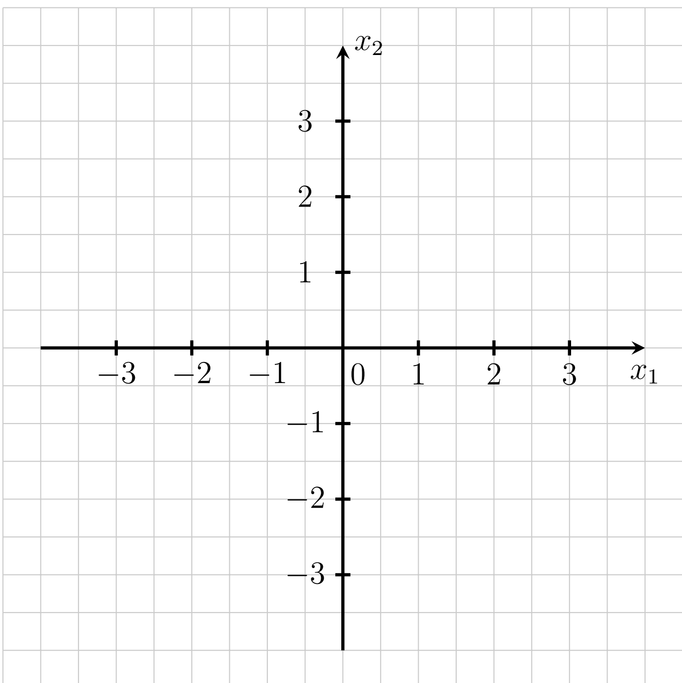
Teil II

Nun werde das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \quad & f_i(x_1, x_2) \\ \text{s.d.} \quad & x_1 \leq \frac{5}{2}\,, && (1) \\ & |x_2| \leq 2\,, && (2) \\ & \frac{x_2}{2} \leq \frac{1}{2} + x_1 && (3) \end{aligned}$$

betrachtet.

b) Skizzieren Sie die zulässige Menge, die durch die Gleichungen (1) – (3) beschrieben wird.



c) Geben Sie die Extremalpunkte der zulässigen Menge aus Unterpunkt **b)** an.

d) Geben Sie für die Zielfunktionen f_1, f_2 und f_3 aus Unterpunkt **a)** die optimale Lösung des Optimierungsproblems an.